Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2xz\\-2yz\\x^2-y^2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+z\\y^2z+z^3\\-y\end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie für

$$\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix}t\\\cos(3t)\\\sin(3t)\end{pmatrix}.$$

die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}.$$

Lösungsskizze:

a)

Potential zu $\boldsymbol{f}$: [**3 Punkte**]

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= 2xz \iff \Phi(x,y,z) = x^2z + C(y,z)\\
\Phi_y &= C_y(y,z) = -2yz \iff C(y,z) = -y^2z + d(z) \Longleftarrow \Phi(x,y,z)\\
&= (x^2-y^2)z + d(z)\\
\Phi_z &= x^2-y^2+d'(z) = x^2-y^2 \iff d(z) = k \Longleftarrow \Phi(x,y,z) = (x^2-y^2)z + k\,.
\end{aligned}$$

Zum Beispiel an $(g_1)_z = 1 \neq 0 = (g_3)_x$ sieht man, dass $\boldsymbol{g}$ kein Potential besitzt. [**1 Punkt**]

b)

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \Phi(c(\pi/6)) - \Phi(c(0)) = \Phi\begin{pmatrix}\frac{\pi}{6}\\\cos(\frac{\pi}{2})\\\sin(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix}0\\\cos(0)\\\sin(0)\end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \Phi\begin{pmatrix}\frac{\pi}{6}\\0\\1\end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{36} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} \;=\; \int_0^{\pi/6} \;<\; \boldsymbol{g}(c(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \;>\; dt \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\sin(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \cos^2(3t)\sin(3t) + \sin^3(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t))^T \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \;=\; t^2 + \sin(3t) - 3\sin^2(3t) - 3\cos^2(3t) \;=\; t^2 + \sin(3t) - 3 \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} \;=\; \int_0^{\pi/6} (t^2 + \sin(3t) - 3)\, dt \;=\; \left[\frac{t^3}{3} \;-\; \frac{\cos(3t)}{3} \;-\; 3t\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi^3}{3 \cdot 6^3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper $K := \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\, 0 \leq z \leq 5 - x + y, \}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (xz, yz, xyz)^{\mathrm{T}}$.

a) Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die drei glatten Flächenstücke F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.

b) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f} \, d\boldsymbol{x}$.

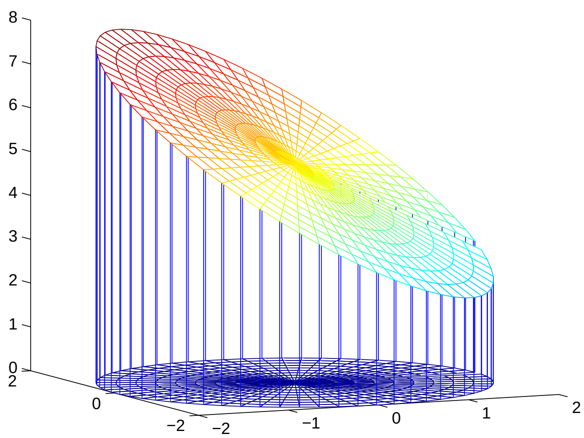
c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke F_1, F_2 und F_3

Lösung:

a) $x^2 + y^2 \leq 4$: Zylinder mit Radius 2, Achse = $z-$ Achse

Nach unten begrenzt durch $z \geq 0$ also $x - y-$ Ebene

Nach oben begrenzt durch Ebene $z = 5 - x + y$



Parametrisierung $F_1 =$ Boden: Kreisscheibe in $x - y-$ Ebene um Null

$$p_1(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi]$$

Parametrisierung $F_2 =$ Mantel: $x^2 + y^2 = 4\,,\, 0 \leq z \leq 5 - x + y$

$$p_2(\phi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \phi \in [0, 2\pi],\ z \in [0,\ 5 - 2\cos\phi + 2\sin\phi]$$

Parametrisierung $F_3 =$ Dach:

Projktion auf $x - y-$ Ebene = Kreisscheibe, $z = 5 - x + y$

$$p_3(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 5 - r\cos\phi + r\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi]$$

b) $K : x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,\ r \in [0,2],\ \phi \in [0,2\pi],$

$0 \le z \le 5 - r\cos\phi + r\sin\phi$

div $\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = z + z + xy$

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{5-r\cos\phi+r\sin\phi} (2z + r^2\sin\phi\cos\phi)\cdot r\, dz d\phi dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(5 - r\cos\phi + r\sin\phi)^2 \ + r^3(5 - r\cos\phi + r\sin\phi)\sin\phi\cos\phi\, d\phi\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(25 - 10r\cos\phi + 10r\sin\phi + r^2 - 2r^2\sin\phi\cdot\cos\phi)\, d\phi\, dr$$

$$+ \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \frac{5}{2}\sin(2\phi) - r\cos^2\phi\sin\phi + r\sin^2\phi\cos\phi d\phi\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 25r + r^3 dr \ = \ 2\pi(50+4) \ = \ 108\pi$$

c) Fluss durch F_1:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach unten. Also wähle

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) \ := \ (xz,\ yz,\ xyz)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{f}\,(p_1(r,\phi) = \ \boldsymbol{f}\,(r\cos\phi, r\sin\phi, 0) \ = \ (0,0,0)^T$$

$$< f(p_1(r,\phi)),\, \boldsymbol{n}_1 >= 0 \implies \int_{F_1} \boldsymbol{f}\ dO \ = \ 0$$

Durch den Boden fließt nichts!

Fluss durch F_2:

$$\frac{\partial p_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach außen. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$\boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\;:=\;(xz,\,yz,\,xyz)^{\mathrm{T}}\,.$

$$\boldsymbol{f}\,(p_2(\phi,z) = \;\boldsymbol{f}\,(2\cos\phi, 2\sin\phi, z)\;=\;(2z\cos\phi, 2z\sin\phi, \cdots)^{\,T}$$

$$< f(p_2(\phi,z)),\,\boldsymbol{n}_{\,2}>=\;4z\cos^2(\phi)\;+4z\sin^2(\phi) =\;4z$$

$$\begin{aligned}\int_{F_2}\boldsymbol{f}\,dO\;&=\;\int_0^{2\pi}\int_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi}4z\,dz\,d\phi\;=\;\int_0^{2\pi}\left[2z^2\right]_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi}d\phi\\ &=\;2\int_0^{2\pi}25-20\cos\phi+20\sin\phi+4(\sin\phi-\cos\phi)^2d\phi\\ &=\;100\pi+2\int_0^{2\pi}4(\sin^2\phi-2\sin\phi\cos\phi+\cos^2\phi)\phi=\;100\pi+16\pi\end{aligned}$$

Den Fluss durch F_3 kann man als Differenz des Gesamtflusses aus Teil b) und den Fluss durch F_1 und F_2 berechnen:

$$\int_{F_3}\boldsymbol{f}\;dO\;=\;108\pi-\int_{F_2}\boldsymbol{f}\;dO\;-\int_{F_1}\boldsymbol{f}\;dO\;=-8\pi$$

Da man genauso gut zunächst den Fluss für F_1 und F_3 rechnen könnte, um anschließend den Fluss durch F_2 mit Hilfe von Teil b) zu berechnen, wird hier der Fluss durch F_3 zu Kontrollzwecken auch nochmals direkt berechnet.

$p_3(r,\phi) = (r\cos\phi,\,r\sin\phi,\,5-r\cos\phi+r\sin\phi)^T$

$$\frac{\partial p_3}{\partial r}\times\frac{\partial p_3}{\partial\phi}\;=\;\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ -\cos\phi+\sin\phi\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\\ r\sin\phi+r\cos\phi\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}r\\ -r\\ r\end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach oben. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$\boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\;:=\;(xz,\,yz,\,xyz)^{\mathrm{T}}\,.$

$$\boldsymbol{f}\,(p_3(r,\phi) =\;(5-r\cos\phi+r\sin\phi)(r\cos\phi, r\sin\phi, r^2\cos\phi\cdot\sin\phi)^T$$

$$\begin{aligned}&< f(p_3(r,\phi)),\,\boldsymbol{n}_{\,3}>=\;r(5-r\cos\phi+r\sin\phi)(r^2\cos\phi\cdot\sin\phi\;+r\cos\phi-r\sin\phi)\\ &< f(p_3(r,\phi)),\,\boldsymbol{n}_{\,3}>=\;r^2\left(\tfrac{5}{2}r\sin(2\phi)+5(\cos\phi-\sin\phi)+r\sin(2\phi)-r\right.\\ &\qquad\left.-r^2\cos^2\phi\cdot\sin\phi-r^2\cos\phi\cdot\sin^2\phi\;\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{F_3}\boldsymbol{f}\,dO\;&=\;\int_0^2\int_0^{2\pi}-r^3(1+r\cos^2\phi\cdot\sin\phi-r\cos\phi\cdot\sin^2\phi)\,d\phi dr\\ &=\;\int_0^2-r^3\,(\phi-r\frac{\cos^3\phi}{3}-\frac{\sin^3\phi}{3})_0^{2\pi}\,dr=-2\pi\frac{2^4}{4}=-8\pi\end{aligned}$$

Abgabetermine: 24.01.–28.01.22