

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sind der wie folgt beschriebene Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld \mathbf{f} :

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in [1, 3], 1 - x \leq y \leq 2 + x, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \right\},$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz + y \\ x(z + 1) + y \\ y(z + 2) + x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, y, z)) \, d(x, y, z).$$

b) Berechnen Sie das Integral $\int_D (1 - x^2) d(x, y)$
 über dem Kreisring $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Hinweis: $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(\cos(2\phi) + 1)$.

Lösung:

a) $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z = 0 + 1 + y$.

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} \int_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1} (1+y) \, dz \, dy \, dx = \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} [(1+y)z]_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1} \, dy \, dx \\ &= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} 2(1+y) \, dy \, dx = \int_1^3 [(1+y)^2]_{1-x}^{2+x} \\ &= \int_1^3 (3+x)^2 - (2-x)^2 \, dx = \int_1^3 (9 + 6x + x^2 - 4 + 4x - x^2) \, dx \\ &= \int_1^3 (5 + 10x) \, dx = [5x + 5x^2]_1^3 = 5(12 - 2) = 50. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_D (1 - x^2) d(x, y) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \varphi) r \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_1^2 r \, dr - \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\underbrace{\cos(2\varphi)}_{\substack{\text{liefert 0 da } \sin(2\varphi) \\ \pi\text{-periodisch}}} + 1) \, d\varphi \, dr \\ &= 3\pi - \pi \int_1^2 r^3 \, dr = 3\pi - \pi \cdot \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

Der Kegel habe die Konstante Dichte $\rho = 2$.

- Berechnen Sie die Masse des Kegels.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich der z -Achse mittels Integration.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich einer zur z -Achse parallelen Achse A , die durch den Punkt $(\frac{3}{2}, 0, 0)^T$ geht.

Lösung zu Aufgabe 2) Transformation: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$, $z = z$.

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatentransformation gilt $\det J = r$

Für die Parameter gilt: $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 4 - 4r]$.

- Für die Masse des homogenen Kegels gilt:

$$m = \int_K \rho d(x, y, z) = \rho \int_K 1 d(x, y, z) = \rho \cdot \text{Volumen}(K)$$

Wer die Formel für das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ benutzt, erhält direkt:

$$m = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 4 = \frac{8\pi}{3}.$$

Wer die Formel nicht kennt oder üben möchte zu integrieren, rechnet:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^{4-4r} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r d\varphi dz dr = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{4-4r} r [\varphi]_0^{2\pi} dz dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r [z]_0^{4-4r} dr = 4\pi \int_0^1 4r - 4r^2 dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{4}{3}r^3 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

- Für den Abstand $a(x, y, z)$ des Punktes $(x, y, z)^T$ zur z -Achse erhält man:

$$a(x, y, z)^2 = x^2 + y^2 = r^2.$$

Für das gesuchte Trägheitsmoment rechnet man:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \int_0^1 \int_0^{4-4r} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r^2 \cdot r d\varphi dz dr = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{4-4r} r^3 [\varphi]_0^{2\pi} dz dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r^3 [z]_0^{4-4r} dr = 4\pi \int_0^1 4r^3 - 4r^4 dr = 4\pi \left[r^4 - \frac{4}{5}r^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

- Nach der Steinerschen Formel gilt:

$\Theta_A = \Theta_z + m \cdot d^2$, wobei d der Abstand der Achse A zur z -Achse ist. Somit folgt

$$\Theta_A = \frac{4\pi}{5} + \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2} = \frac{34\pi}{5}.$$

Bearbeitungstermine: 10.01–14.01.22