Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Massendichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Hinweis: Es gilt

Masse: $M = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \frac{1}{M} \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}$ (komponentenweise)

b) Sei $K := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0 \right\}$. Berechnen Sie

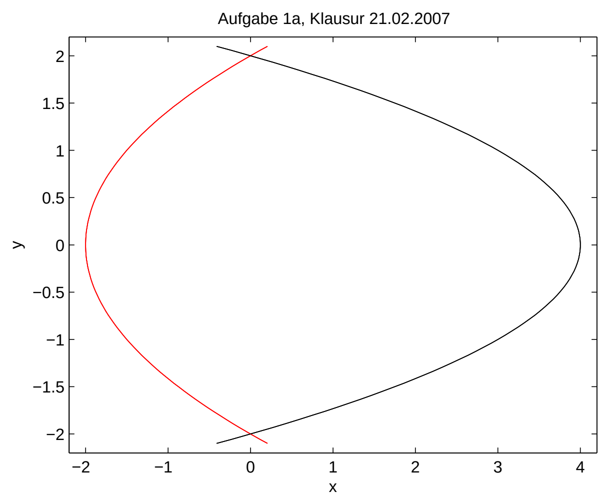
$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z)$$

Hinweise:
- *Verwendung von* **Kugelkoordinaten** *spart Arbeit.*
- *Es gilt* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) Wie man der Skizze entnimmt gilt

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \le y \le 2, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$



[1 Punkt]

Zur Berechnung des Schwerpunktes, rechnet man zunächst die Masse M aus.

$$M = \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\,dx\,dy = 2\int_{-2}^{2} 4 - y^2 - \frac{y^2}{2} + 2\,dy$$

$$= 2\left[-\frac{y^3}{2} + 6y\right]_{-2}^{2} = 4(-4+12) = 32 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Für die y–Komponente des Schwerpunktes gilt aus Symmetriegründen : $y_s = 0$. **[1 Punkt]**

Für die x–Komponente des Schwerpunktes erhält man

$$x_s = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\,x\,dx\,dy = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2} 2\cdot\frac{1}{2}\left((4-y^2)^2 - \frac{(y^2-4)^2}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\frac{3}{8}(4-y^2)^2\,dy = \frac{3}{8\cdot 16}\left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{3}{8\cdot 8}(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}) = \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Übergang zu Kugelkoordinaten (vgl. Blatt 3p, Aufgabe 1b) ergibt mit

$$\Phi\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

und $\det \boldsymbol{J}\,\Phi = r^2\cos(\varphi)$ (aus der Vorlesung bekannt):

$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z) =$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) \cos^2\theta \cdot r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta) \left(\int_0^{2\pi} -\cos 2\varphi \, d\varphi \right) d\theta \, dr = 0$$

Zusatz: (da in der Vorlesung/Hörsaalübung nicht bewiesen):

$$J\Phi \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\ \cos\ \phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\ \sin\ \phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det\, \boldsymbol{J}\Phi = \sin\theta \begin{vmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -r\ \cos\ \phi\sin\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & -r\ \sin\ \phi\sin\theta \end{vmatrix} \;+\; r\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta\ \left(r^2\ \sin\theta\ \cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\right)\ +\ r\cos\theta\ \left(r\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\right)$$

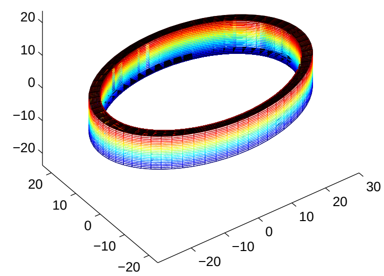
$$=\ r^2\cos\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\ =\ r^2\cos\theta\,,$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das elliptische Rohrstück

$$R \subset \mathbb{R}^3, \quad R: 81 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 100, \quad -5 \leq z \leq 5.$$

Das Rohrstück habe die Konstante Dichte ρ.



Berechnen Sie das Volumen, die Masse und das Trägheitsmoment des Rohrstücks bzgl. der $y-$ Achse mittels Integration. Verwenden Sie elliptische Zylinderkoordinaten

$$x = 3r\cos(\varphi)\,,\ y = 2r\sin(\varphi)\,,\ z = z\,.$$

Hinweise:

$\cos^2(\phi) = \frac{\cos(2\phi)+1}{2}$.
Ohne Taschenrechner muss am Ende kein Zahlenwert berechnet werden. Es genügt die Integrationsgrenzen in die berechneten Stammfunktionen einzusetzen.

Lösungsskizze zu 2:

Transformation:

$$x = 3r\cos(\varphi)\,,\ y = 2r\sin(\varphi)\,,\ z = z\,.$$

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatenransformation gilt

$$\det\ \boldsymbol{J} = \det\begin{pmatrix} 3\cos(\varphi) & -3r\sin(\varphi) & 0 \\ 2\sin(\varphi) & 2r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6r\,.$$

Für die Parameter gilt: $r \in [9,10]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [-5,5]$. Für das Volumen erhält man daher

$$V = \int_9^{10}\int_{-5}^{5}\int_0^{2\pi} 6r\,d\varphi\,dz\,dr = 120\pi\int_9^{10} r dr = 60\pi(100-81) = 1140\pi\,.$$

Für die Masse gilt $M = V\cdot\rho = 1140\pi\,\rho$.

Für den Abstand $a(x,y,z)$ des Punktes $(x,y,z)^T$ zur $y-$ Achse gilt: $a(x,y,z)^2 = x^2+z^2$.
Für das gesuchte Trägheitsmoment also:

$$\begin{aligned}
\theta_y &= \int_9^{10}\int_{-5}^{5}\int_0^{2\pi} \rho(9r^2\cos^2(\varphi)+z^2)\,6r\,d\varphi\,dz\,dr \\
&= 6\rho\int_9^{10}\int_{-5}^{5}\int_0^{2\pi} 9r^3\left(\frac{\cos(2\varphi)+1}{2}\right)+rz^2\,d\varphi\,dz\,dr \\
&= 6\rho\int_9^{10}\int_{-5}^{5}\left[\left(\frac{9r^3}{2}+z^2r\right)\varphi\right]_0^{2\pi}dz\,dr \;=\; 6\rho\int_9^{10}\int_{-5}^{5} 9r^3\pi+2z^2r\pi\,dz\,dr \\
&= 6\rho\cdot\pi\int_9^{10} 90r^3+2r\left[z^3/3\right]_{-5}^{5}dr \;=\; 6\rho\cdot\pi\left(\frac{90}{4}(10^4-9^4)+\frac{250}{3}(100-81)\right) \\
&= \rho\cdot 1.488377643527968\cdot 10^6.
\end{aligned}$$

Abgabetermine: 10.01.–14.01.22