Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Gesucht sind die Minima von} \quad & f(x,y) \,=\, 2 \,-\, x \,+\, \frac{4}{9}\, y \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & g(x,y) = \,25 \,-\, 9x^2 \,-\, y^2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $25 \,-\, 9x^2 \,-\, y^2 > 0\,.$? Begründen Sie ihre Antwort.

   Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = 2 \,-\, x \,+\, \frac{4}{9}\, y\,.$

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \,25 \,-\, 9x^2 \,-\, y^2 \,=\, 0$$

   mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

   Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll aber an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
   (Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Es gibt keine Extrema im Inneren des zulässigen Bereichs, denn
   $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-1,\, \frac{4}{9}\right) \neq \mathbf{0}\,, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$

b) Die Regularitätsbedingung: $\operatorname{grad} g(x,y) = (-18x,\, -2y) \neq (0,0)^T$ ist auf der zulässigen Menge erfüllt, da $(0,0)$ kein zulässiger Punkt ist.

   Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\operatorname{grad} f(x,y) + \,\lambda\, \operatorname{grad} g(x,y) =\, 0.$$

   Also haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -1 + \lambda \cdot (-18x) \quad &= 0 \implies \lambda \neq 0 \,\wedge\, x = \,-\tfrac{1}{18\lambda}\,, \\ \tfrac{4}{9} + \lambda \cdot (-2y) \quad &= 0 \implies \lambda \neq 0 \,\wedge\, y = \tfrac{2}{9\lambda}\,, \\ 25 \,-\, 9x^2 \,-\, y^2 \quad &= 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile ein, so folgt:

$$25 - \frac{9}{18^2\lambda^2} - \frac{2^2}{9^2\lambda^2} = 0 \Longrightarrow 25 = \frac{9+4\cdot 4}{18^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

$$25\lambda^2 = \frac{25}{18^2} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{18}$$

Wir erhalten also zwei Lösungen:

$\lambda_1 = \frac{1}{18},\ x_1 = -\frac{1}{18\lambda_1} = -1,\ y_1 = \frac{2}{9\lambda_1} = 4$

und

$\lambda_2 = -\frac{1}{18},\ x_2 = -\frac{1}{18\lambda_2} = 1,\ y_2 = \frac{2}{9\lambda_2} = -4\,.$

Die zulässige Menge ist kompakt. Minimum und Maximum werden angenommen. Die einzigen Kandidaten sind P_1 und P_2.

$f(P_1) = 2+1+\frac{16}{9}, \qquad f(P_2) = 2-1-\frac{16}{9}\,.$

Das einzige lokale Minimum (und damit das globale Minimum) auf der zulässigen Menge liegt in P_2.

Alternativ: Für die Hessematrix rechnet man:

$$\boldsymbol{H_x}\,(x,y) = \begin{pmatrix} -18\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Diese ist für λ_1 negativ definit und für λ_2 positiv definit. Also liegt im Punkt

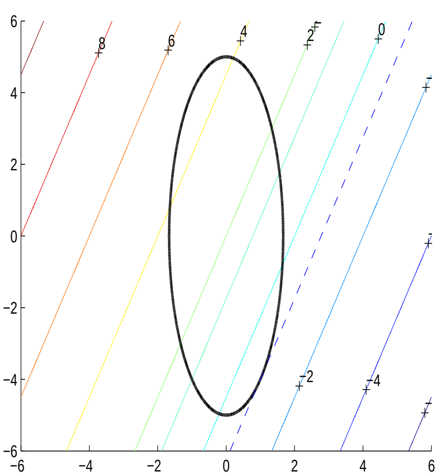
$P_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Maximum vor und im Punkt

$P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein Minimum.

c) Da auch

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x,y) = 25 - 9x^2 - y^2 \geq 0\,.\right\}$$

kompakt ist, nimmt auch hier die Funktion f ihr globales Minimum an. Allerdings nicht im Innern (siehe a)). Also liegt das globale Minimum von f auf dem Rand. Wegen b) kommt dafür nur P_2 in Frage. (1).



Aufgabe 2:

Gegeben sei die Minimierungsaufgabe

$$f(x, y, z) := 2x + y + z = \min!$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$h(x, y, z) := x^2 + (y - z)^2 = 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2, 2)^T$ zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion $F := f + \lambda_1 g + \lambda_2 h$ ist.

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2, 2)^T$ ein lokales Maximum der Funktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösungsskizze:

a) Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} 2 + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 2x &= 0 \\ 1 + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 2(y - z) &= 0 \\ 1 + \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 \cdot (-2(y - z)) &= 0 \end{aligned}$$

Für $x_0 = (1, 2, 2)^T$ lautet das System

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Das System ist für $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$ erfüllt.

b) Zulässigkeit:

Zu prüfen sind

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ und $x^2 + (y - z)^2 = 1$:

Es gilt:

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ und $1^2 + (2 - 2)^2 = 1$:

$\boldsymbol{x}_0$ ist also zulässig.

Die zu untersuchende Hessematrix ist

$$\boldsymbol{H_x}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda_1+\lambda_2) & -2\lambda_2 \\ 0 & -2\lambda_2 & 2(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $x_0 = (1,2,2)^T$ zusammen mit den Multiplikatoren $\lambda_1 \;=\; -\frac{1}{4}$ und $\lambda_2 \;=\; -\frac{3}{4}$, also

$$\boldsymbol{H_x}\,(1,2,2) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz von Gerschgorin (bekannt aus Lineare Algebra?) folgt, dass kein Eigenwert von $\boldsymbol{H_x}$ größer als $-2+\frac{3}{2}$ sein kann.

Alternativ: Eigenwerte berechnen.

$\mu_1 = -2$ (direkt auf der Diagonalen ablesbar).

Für die beiden anderen Eigenwerte gilt:

$$(-2-\mu)^2 - (\frac{3}{2})^2 = 0 \Longrightarrow \mu_{2,3} \;=\; -2 \;\pm\; \frac{3}{2}\,.$$

Alle Eigenwerte sind negativ. Es handelt sich also um ein lokales Maximum.

Bearbeitungstermine: 13.12–17.12.21