Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1)

Durch die Relation

$$g(x,y) = \left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $(x,y) = (0,0)^T$ ein singulärer Punkt der implizit definierten Kurve

$$\left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist und stellen Sie fest, ob dies ein isolierter Punkt, ein Rückkehrpunkt oder ein Doppelpunkt ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine weiteren singulären Punkte gibt.

c) Berechnen Sie die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Lösung: [?+?+? Punkte]

a) $g_x(x,y) = 2(x^2+4y^2)2x + 2x = 2x(2x^2+8y^2+1) \Longrightarrow g_x(0,0) = 0$

$g_y(x,y) = 2(x^2+4y^2)8y - 8y = 8y(2x^2+8y^2-1) \qquad \Longrightarrow g_y(0,0) = 0$

Außerdem gilt $g(0,0) = 0$. Also ist $(0,0)^T$ ein singulärer Punkt der Kurve. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 12x^2 + 16y^2 + 2 \\ g_{xy} &= 32xy \\ g_{yy} &= 16x^2 + 192y^2 - 8 \end{aligned}$$

damit erhält man

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Es liegt also ein Doppelpunkt vor.

b) Gesucht sind Punkte mit $g = g_x = g_y = 0$.

$$0 = g_x(x,y) = 2x(2x^2+8y^2+1) \Longleftrightarrow x = 0$$

$0 = g_y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1)$

$\iff y = 0$ oder $2x^2 + 8y^2 = 1$

Setzt man $x = 0$ in $2x^2 + 8y^2 = 1$ ein, so folgt $y^2 = 1/8$. Nun gilt aber
$g\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \neq 0$.

Die Punkte $\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^T$ liegen also nicht auf der Kurve. Der Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist also der einzige stationäre Punkt.

c) Punkte mit horizontaler Tangente: Zu erfüllen sind $g = g_x = 0,\ g_y \neq 0$.

Oben schon geprüft: $g_x = 0 \implies x = 0$.
Die gesuchten Punkte müssen auf der Kurve liegen:
$g(0, y) = (4y^2)^2 - 4y^2 = 0 \implies y = 0$ oder $4y^2 = 1$.
$y = 0$ liefert den singulären Punkt. Wir erhalten also $y = \pm\frac{1}{2}$. Aus Teil b) wissen wir, dass es keine singulären Punkte außer $(0, 0)$ gibt, also hat die Kurve horizontale Tangenten in:

$P_1 = \binom{0}{-\frac{1}{2}}$ $\qquad P_2 = \binom{0}{\frac{1}{2}}$

Gesucht sind noch die Punkte mit vertikaler Tangente $g = g_y = 0,\ g_x \neq 0$.

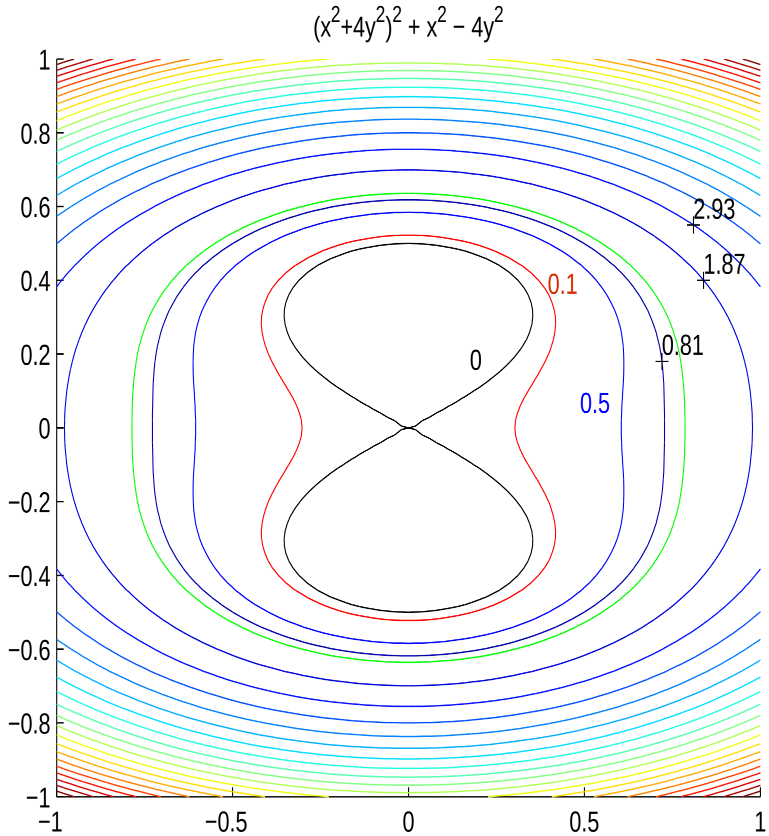
$g_y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1) \overset{!}{=} 0$
$\iff y = 0 \lor 2x^2 + 8y^2 - 1 = 0$

$y = 0$ eingesetzt in g
$g(x, 0) = (x^2 + 0)^2 + x^2 = 0 \iff x = 0$. Das ist wieder der singuläre Punkt.

$2x^2 + 8y^2 - 1 = 0 \iff 4y^2 = \frac{1}{2} - x^2$ eingesetzt in g
$g(x, y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2} - x^2\right)^2 + x^2 - \frac{1}{2} + x^2 = 0$.
$\iff x^2 = \frac{1}{8}, \qquad y^2 = \frac{1}{8}(1 - 2x^2) = \frac{3}{32}$

Da es außer $(0, 0)$ keine singulären Punkte gibt, sind die anderen vier Punkte, in denen $g = g_y = 0$ gilt, Punkte mit vertikalen Tangenten:

$$P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} \end{pmatrix} \qquad P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} \end{pmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2: Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \,=\, 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) \,+\, x \,+\, 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \,=\, x\,y \,-\, 1 \,=0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0, y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ mit einem geeigneten festen λ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F \,=\, f \,+\, \lambda\, g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H_x}\, F(x_0, y_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $\ker\,(Dg(x_0, y_0))$.

Lösung:

a) Es gilt $g(1,1) = 1-1 = 0$. Der Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$ ist also zulässig. **[1 Punkt]**

$\nabla g(x,y) \,=\, \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \implies \nabla g(1,1) \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Regularitätsbedingung ist also erfüllt. **[1 Punkt]**

Für f rechnet man

$$\nabla f(x,y) = = \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} \,+\, 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x}{y}} \,+\, 5 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{1}{x} \,+\, 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{-1}{y} \,+\, 5 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkte]}$$

Somit erhält man für einen zulässigen stationären Punkt der Lagrange-Funktion $F = f + \lambda g$ das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{2}{x} \,+\, 1 \,+\, \lambda y \,=\, 0\,, \\ F_y &= \frac{-2}{y} \,+\, 5 \,+\, \lambda x \,=\, 0\,, \\ g &= xy \,-\, 1 \,=\, 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Für $x \,=\, y \,=\, 1$ also

$$\begin{aligned} F_x &: \frac{2}{1} \,+\, 1 \,+\, \lambda \,=\, 0 \iff \lambda = \,-3\,, \\ F_y &= \frac{-2}{1} \,+\, 5 \,+\, \lambda \,=\, 0 \iff \lambda =\, -3\,, \\ g &= 1 \,-\, 1 \,=\, 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

$(1,1)^T$ ist also ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion mit zugehörigem Multiplikator $\lambda = -3$.

b) Mit $\lambda = -3$ gilt für die Hesse Matrix:

$$\boldsymbol{H_x}\, F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^2} & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{y^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

d.h. $\boldsymbol{H_x}\, F(1,1)$ ist indefinit ($\det \boldsymbol{H_x}\, F(1,1) = -13$). **[1 Punkt]**

Tangentialraum:

$\boldsymbol{v} = \binom{x}{y}$ mit $\nabla g(1,1)^T \cdot \binom{x}{y} = 0 \Rightarrow x + y = 0$. **[1 Punkt]**

Auf dem Tangentialraum:

$$(1,-1)\, \boldsymbol{H_x}\, F(1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1) \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

[1 Punkt]

d.h. die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H_x}\, F(1,1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,1)$ ein strenges lokales Minimum vor.
[1 Punkt]

Aufgabe 3) Berechnen Sie

a) das Integral
$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1,3] \times [1,2],$$

b) das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, |x| \leq 1, \;\; -(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2, \;\; 0 \leq z \leq \big(1-x^2-y\big) \right\},$$

c) und das Integral
$$\int\int_{D_2} (x^2-y^4) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrien aus!

Lösung:

a)
$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1,3] \times [1,2]$$
$$I_1 := \int_1^2 \int_{-1}^3 xy^2 \, dx \, dy = \int_1^2 y^2 \int_{-1}^3 x \, dx \, dy$$
$$= \left(\int_1^2 y^2 dy\right) \left(\int_{-1}^3 x \, dx\right) = \frac{y^3}{3}\bigg|_1^2 \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^3 \;=\; 28/3.$$

b)
$$V = \int_K 1 \, \mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \int_0^{1-x^2-y} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} (1-x^2-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 2(1-x^2)^2 - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \mathrm{d}x$$
$$= 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1$$
$$= 4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}.$$

c)

$$\int\int_{D_2} (x^2 - y^4) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$$

Zunächst beobachtet man, dass $f(x,y) = x^2 - y^4$ und D_2 achsensymmetrisch sowohl bzgl. der x-Achse als auch bzgl. der y-Achse sind. Ist also $\overline{D} = D_2 \cap$ (1.Quadrant), so gilt

$$I_2 := \int\int_{D_2} f(x,y)\, d(x,y) \;=\; 4 \cdot \int\int_{\overline{D}} f(x,y) d(x,y)\ .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} I_2 =& 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 - y^4 \, dy \, dx = 4 \int_0^1 \left. (x^2\, y - \frac{y^5}{5}) \right|_0^{1-x} dx \\ =& 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) - \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \left. \frac{(1-x)^6}{30} \right|_0^1 \right] \\ =& 4 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 0 - \left(0 - 0 + \frac{1}{30} \right) \right] = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Abgabetermine: 13.12.–17.12.21