Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion

$$f\,:\,\left[-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\right]\times\left[-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\right]\to\mathbb{R}$$

$$f(x,y)\;=\;4x^2+xy+4y^2+\sin(x-y)\,,$$

indem Sie ein Minimum $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ des Taylorpolynoms zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$ berechnen.

Tipp: verwenden Sie die Sinus-Reihe.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds R_2 in dem errechneten Punkt $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange ab.

Tipp: Sie brauchen keine einzige Ableitung exakt auszurechnen.

c) Zeigen Sie, dass der minimale Wert von f auf dem oben angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als $-\frac{9}{49}$ sein kann.

Lösung 1:

a) Das Taylorpolynom zweiten Grades gibt die polynomialen Teile bis zum Grad 2 exakt wieder. Für den Sinusterm liest man das Taylorpolynom zweiten Grades aus der Reihenentwicklung

$$\sin(x-y)\;=\;(x-y)-\frac{(x-y)^3}{3!}+\frac{(x-y)^5}{5!}\mp\cdots$$

ab und erhält für f

$$T_2(x,y)=4x^2+xy+4y^2+(x-y)\,.$$

Alternativ berechnet man das Taylor-Polynom zweiten Grades T_s für $s(x,y)=\sin(x,y)$

	Wert in $(0,0)^T$
$s(x,y)\;:=\;\sin(x-y)$	0
$s_x(x,y)\;=\cos(x-y)$	1
$s_y(x,y)\;=-\cos(x-y)$	-1
$s_{xx}(x,y)\;=\;-\sin(x-y)$	0
$s_{xy}(x,y)\;=\;\sin(x-y)$	0
$s_{yy}(x,y)\;=\;-\sin(x-y)$	0

und damit

$T_s(x,y) = x - y$ und $T_2(x,y) = 4x^2 + xy + 4y^2 + (x-y)\,.$ **[3 Punkte]**

$\operatorname{grad} T_2(x,y) = (8x + y + 1,\ 8y + x - 1)$

$\operatorname{grad}\ T_2(x,y) = 0 \iff y = -1 - 8x \quad$ und $\quad 8(-1-8x) + x - 1 = 0$

$\iff \tilde{x} = -\frac{1}{7},\ \tilde{y} = \frac{1}{7}$, einziger Kandidat für ein Minimum. **[2 Punkte]**

$H\,T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte der Hesse Matrix sind 7 und 9.
Es liegt also ein Minimum vor. **[1 Punkt]**

$T_2\left(-\frac{1}{7},\ \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7} = -0,142857\cdots\,.$

b) Alle dritten Ableitungen haben die Form $\pm\cos(x-y)$. Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist $C = 1$. Damit erhält man

$$\left|R_2\left(-\frac{1}{7},\ \frac{1}{7}\right)\right| \le \frac{1\cdot 2^3}{3!}\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty^3 = \frac{4}{21\cdot 49} < \frac{1}{5\cdot 49} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

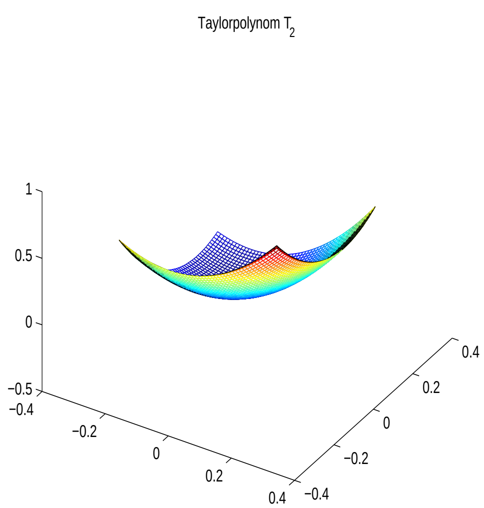
c) Auf dem angegebenem Definitionsbereich gilt

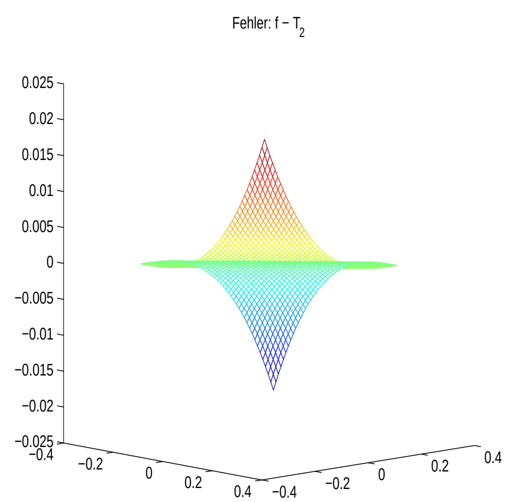
$$|R_2\,(x,\ y)| \le \frac{1\cdot 2^3}{3!}\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty^3 = \frac{1}{48} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für den minimalen Wert der Funktion gilt daher

$$f(x_{min}, y_{min}) \ge T_2(x_{min}, y_{min}) - \frac{1}{48} \ge T_2\left(-\frac{1}{7},\ \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{48} = -\frac{1}{7} - \frac{1}{48} \ge -\frac{7}{49} - \frac{2}{49} = -\frac{9}{49}$$

[1 Punkt]





Aufgabe 2: Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = 2018,$$

b) $g(x,y) := x^2 - xy - x + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}$.

Lösung zu 2:

a)

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4, 12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2018 = -x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x + 12y + 2018.$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x + 4y - 4 = 0 \iff x = 2y - 2. \\ f_y(x,y) &= 4x - 4y + 12 = 8y - 8 - 4y + 12 = 0 \\ &\iff y = -1 \implies x = -4. \end{aligned}$$

Die Hessematrix $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(\boldsymbol{H}(x,y)) = 8 - 16 < 0$ ist indefinit. Also liegt ein Sattelpunkt vor.

b) Für g erhält man $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + y^3 + y^2 \end{pmatrix}$

$$2x - y - 1 = 0 \iff x = \frac{y+1}{2}$$

$$-x + y^3 + y^2 = -\frac{y+1}{2} + y^2(y+1) = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)(y+1) = 0$$

$$\implies y \in \left\{-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Damit erhält man drei stationäre Punkte:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für die Hessematrix rechnet man:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= 2 \\ g_{xy}(x,y) &= g_{yx}(x,y) = -1 \\ g_{yy}(x,y) &= 3y^2 + 2y \end{aligned}$$

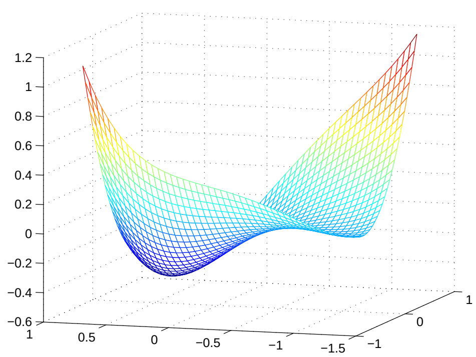
In den Punkten $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ erhält man die Hessematrizen

$$\boldsymbol{H}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]}_{11} = 2 > 0,\ \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 2 - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]} \text{ positiv definit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \boldsymbol{H}^{[2]} = 3 - 2\sqrt{2} - 1 < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[2]} \text{ ist indefinit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]}_{11} = 2 > 0,\ \det \boldsymbol{H}^{[3]} = 3 + 2\sqrt{2} - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]} \text{ positiv definit.}$$

In $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ liegen Minima vor. $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist ein Sattelpunkt.



Bearbeitungstermine: 29.11–03.12.21