Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1) [12 Punkte] Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x,y) = f(x,y) \,-\, T_2(x,y)$ im Bereich $|x| \le 0.1\,,\ |y| \le 0.1$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; 0.006\,.$$

c) Bestimmen Sie den stationären Punkt von T_2 und prüfen Sie, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

Hinweise: $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) \;=\; 0\,.$

Lösung:

a) **[4 Punkte]**

	Wert in $(0,0)^T$
$f(x,y) \;:=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1$	0
$f_x(x,y) \;=\; \arctan(y) \,+\, e^{x+y}$	1
$f_y(x,y) \;=\; \frac{x}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	1
$f_{xx}(x,y) \;=\; e^{x+y}$	1
$f_{xy}(x,y) \;=\; \frac{1}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	2
$f_{yy}(x,y) \;=\; \frac{-2xy}{(1+y^2)^2} \,+ e^{x+y}$	1

$$T_2(x,y) = x \,+\, y + \frac{1}{2}\,x^2 \,+\, 2xy \,+\, \frac{1}{2}\,y^2\,.$$

b) **[4 Punkte]**

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{maximaler Betrag} \\
\hline
|f_{xxx}(x,y)| = |e^{x+y}| & & \leq e^{0.2} \\
|f_{xxy}(x,y)| = |e^{x+y}| & & \leq e^{0.2} \\
|f_{xyy}(x,y)| = \left|\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2} + e^{x+y}\right| & & \leq 0.2 + e^{0.2} \\
|f_{yyy}(x,y)| = \left|-2x \cdot \dfrac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4} + e^{x+y}\right| & & \leq 0.3 + e^{0.2}
\end{array}
$$

Für die letzte Ableitung rechnet man zum Beispiel

$$\left|2x \cdot \frac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4}\right| \leq 0.2\left(\frac{1}{(1+y^2)^2} + \frac{4|y|^2}{(1+y^2)^3}\right) \leq 0.2\left(1 + \frac{0.04}{1}\right) = 0.208\,.$$

Insgesamt kann als obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen
$C = 3 > 2.3 = \sqrt{4} + 0.3 > \sqrt{e} + 0.3 > e^{0.2} + 0.208$
gewählt werden. Mit der üblichen Abschätzung gilt dann:

$$|R_2(x,y)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot C \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \leq \frac{8}{6} \cdot 3 \cdot 0.1^3 = 0.004 < 0.006\,.$$

Bemerkung: Wer $e^{0.2}$ mit 3 abschätzt und $C = 4$ wählt, erhält die Schranke 0.00533333.

c) **[4 Punkte]**

Stationärer Punkt $\boldsymbol{P}$ von

$$T_2(x,y) = x + y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2\,.$$

grad $T_2 = (1 + x + 2y,\, 1 + 2x + y) \stackrel{!}{=} (0,0) \Longrightarrow x = y = -\frac{1}{3}$

Die Hessematrix $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Denn die Determinante ist negativ. Alternativ rechnet man die Eigenwerte aus:
$(1-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2\,.$

in $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ liegt also ein Sattelpunkt von T_2 vor.

Aufgabe 2: Gegeben sei $\quad f(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0\,.$

a) (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $f(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)\,.$$

(ii) Berechnen Sie das Taylor Polynom ersten Grades der Funktion g aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$f(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0,y_0,z_0)^T := (0,1,1)^T$ nach x aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(y,z)$ mit $g(1,1) = 0$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0, y_0, z_0 folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y,z) = 0 \iff x = g(y,z)\,.$$

Nach welcher(n) anderen Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Lösungsskizze Aufgabe 2:

a) (i) $f(2,-2) = 0\,.$

$$\boldsymbol{J}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 8y \\ 4y^3 + 8x \end{pmatrix}^T \implies \boldsymbol{J}\, f(2,-2) = \begin{pmatrix} 32 - 16 \\ -32 + 16 \end{pmatrix}^T \implies$$

In der Nähe von $(2,-2)^T$ kann man nach y oder nach x auflösen.

(ii) $\quad T_1(x;2) = g(2) + g'(2)(x-2)$

Für das Taylor Polynom ersten Grades brauchen noch $g'(2)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$g'(x) = -f_x/f_y = -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x} \implies g'(2) = -\frac{16}{-16} = 1\,.$$

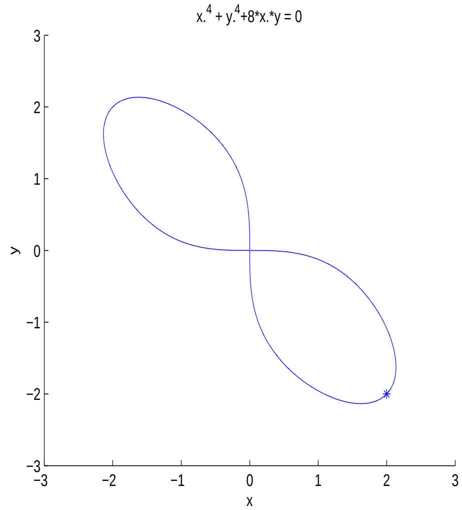
Alternativ : implizites Differenzieren

$$f(x,y(x)) = x^4 + (y(x))^4 + 8xy(x) = 0$$

$$f'(x,y(x)) = 4x^3 + 4y^3y' + 8y + 8xy' = (4x^3 + 8y) + (4y^3 + 8x)y' = 0$$

$$\implies y'(x) = -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x}$$

$$T_1(x;2) = y(2) + y'(2)(x-2) = -2 + (x-2)$$



(iii)

b) Als Jacobi-Matrix von f ergibt sich

$$\mathbf{J}f(x,y,z) = \big((2x - 2ye^{xy})z, \quad -2xze^{xy}, \quad x^2 - 2e^{xy}\big)$$

und daher gilt $\mathbf{J}f(0,1,1) = (-2,0,-2)$.

Weil $\frac{\partial f}{\partial x} = -2$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial z} = -2$ als 1×1-Matrizen invertierbar sind, gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen auf geeigneten Umgebungen von P_0 Funktionen $x(y,z)$ bzw. $z(x,y)$ mit $x(1,1) = 0$ und $f(x(y,z),y,z) = 0$ bzw. $z(0,1) = 1$ und $f(x,y,z(x,y)) = 0$.

Der Satz macht keine Aussage darüber, ob lokal nach y aufgelöst werden kann. Eine explizite Auflösung der Formel für f nach y ergibt

$y = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{z}\right)$.

Dieser Ausdruck ist in keiner Umgebung von $x = (0,1,1)^T$ definiert!

Abgabetermine: 29.11.–03.12.21