Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen

a) (i) $\hat{\boldsymbol{f}}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \hat{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x^2+y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$

(ii) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(3\gamma+1)x_1} - x_2 - 1 \\ 5x_1 + e^{(3\gamma-1)x_2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}$ fester Parameter.

(iii) $\tilde{\boldsymbol{f}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \tilde{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + x_2^2 - 3x_3 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 \\ 2x_1 - 4x_2^4 + x_3 \end{pmatrix}.$

b) Für die Transformation von Kugelkoordinaten auf kartesischen Koordinaten

$$\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gilt

$\det(\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(r,\phi,\theta)) = r^2\cos(\theta)\,.$

Geben Sie die Determinante der Jacobi Matrix für die Transformation auf elliptische Kugelkoordinaten

$$\tilde{\boldsymbol{g}} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos(\phi)\cos(\theta) \\ br\sin(\phi)\cos(\theta) \\ cr\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit festen positiven Zahlen a, b, c an.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a) (i) $J\,\hat{\boldsymbol{f}}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}.$

(ii) $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}\,(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} (3\gamma+1)e^{(3\gamma+1)x_1} & -1 \\ 5 & (3\gamma-1)e^{(3\gamma-1)x_2} \end{pmatrix}.$

(iii) $\quad \boldsymbol{J}\ \tilde{\boldsymbol{f}}\,(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} -4 & 2x_2 & -3 \\ 2x_1 & -3 & 2x_3 \\ 2 & -16x_2^3 & 1 \end{pmatrix}\,.$

b) Mit $\boldsymbol{h}\,(x, y, z) = (ax, by, cz)$ gilt $\tilde{\boldsymbol{g}} \,=\, \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}$ und damit
$\boldsymbol{J}\ \tilde{\boldsymbol{g}} \;=\; \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h} \,\cdot\, \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}$ und $\det(\,\boldsymbol{J}\ \tilde{\boldsymbol{g}}\,) = \det(\,\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h}\,)\cdot\det(\,\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,)$

Offensichtlich gilt

$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ und $\det(\,\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h}\,) = abc.$

$\det(\,\boldsymbol{J}\ \tilde{\boldsymbol{g}}\,) = abc \cdot r^2 \cos(\theta)\,.$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von

$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z)$$

mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$.

Lösung:

$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z), \qquad f(0,1,\pi) = 2 + 1 + \cos(\pi) = 2\,.$$

$$\begin{aligned}
f_x &= z + e^x y^2 \cos(z), & f_x(0,1,\pi) &= \pi - 1 \\
f_y &= 2y + 2ye^x \cos(z), & f_y(0,1,\pi)) &= 2 - 2 = 0 \\
f_z &= x - e^x y^2 \sin(z), & f_z(0,1,\pi) &= 0 - 0 = 0 \\
f_{xx} &= e^x y^2 \cos(z), & f_{xx}(0,1,\pi) &= -1 \\
f_{xy} &= 2e^x y \cos(z), & f_{xy}(0,1,\pi) &= -2 \\
f_{xz} &= 1 - e^x y^2 \sin(z), & f_{xz}(0,1,\pi) &= 1 \\
f_{yy} &= 2 + 2e^x \cos(z), & f_{yy}(0,1,\pi) &= 2 - 2 = 0 \\
f_{yz} &= -2ye^x \sin(z), & f_{yz}(0,1,\pi) &= 0 \\
f_{zz} &= -e^x y^2 \cos(z), & f_{zz}(0,1,\pi) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) \;&=\; f(0,1,\pi) \;+\; f_x(0,1,\pi)(x-x_0) \;+\; f_y(0,1,\pi)(y-y_0) \;+\; f_z(0,1,\pi)(z-z_0) \\
&+\; \frac{1}{2}\,(x-x_0, y-y_0, z-z_0) Hf(0,1,\pi) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \\
&=\; 2 + x(\pi-1) + \frac{1}{2}\,(x, y-1, z-\pi) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-\pi \end{pmatrix} \\
&= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}\,(x, y-1, z-\pi) \begin{pmatrix} -x - 2(y-1) + (z-\pi) \\ -2x \\ x + (z-\pi) \end{pmatrix} \\
&= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}\left[-x^2 - 2x(y-1) + x(z-\pi) - 2x(y-1) + x(z-\pi) + (z-\pi)^2\right] \\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ rechnet man

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) \;=\; & f(0,1,\pi) \;+\; \operatorname{grad} f(0,1,\pi)^T \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-\pi \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2!}\,\big(f_{xx}(0,1,\pi)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,1,\pi)(x-0)(y-1) \\
& + 2f_{xz}(0,1,\pi)(x-0)(z-\pi) + f_{yy}(0,1,\pi)(y-1)^2 \\
& + 2f_{yz}(0,1,\pi)(y-1)(z-\pi) + f_{zz}(0,1,\pi)(z-\pi)^2\big) \\
& 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}
\end{aligned}$$

Oder über Taylorreihen mit

$$\begin{aligned}
\cos(z) = -\cos(z-\pi) = \; & -1 + \frac{1}{2}(z-\pi)^2 + \cdots\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \\
y^2 = (y-1)^2 + 2(y-1) + 1 &
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und nur die Terme bis Potenz zwei nehmen. Dann noch die Terme $2 + xz + y^2$ dazu addieren, die exakt wiedergegeben werden. Also von

Bearbeitungstermine: 15.–19.11.21