Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}):=2x^2+y^2-4x+z$ sowie der Punkt $\boldsymbol{x}_0=(1,2,3)^T$ und die Richtung $\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2)$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}_0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}_0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}_0)$ für $\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$.

   Können Sie entscheiden, ob es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt? Können Sie also entscheiden, ob die Funktionswerte steigen oder fallen wenn man von $\boldsymbol{x}_0$ aus in Richtung $\boldsymbol{a}$ geht?

c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_0+t\,\boldsymbol{a})$ für $t=\frac{\sqrt{6}}{2},2\sqrt{6},3\sqrt{6}$. Ergibt sich da nicht ein Widerspruch zu ihrem Ergebnis aus b?

Lösung: (3+ 2 + 5 Punkte)

a) Auf der gesuchten Niveaufläche gilt

$$2x^2+y^2-4x+z=5\,.$$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(4x-4,2y,1)^T$$
$$\operatorname{grad} f(1,2,3)=(0,4,1)^T$$

b) $D_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)=<\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}>=\frac{1}{\sqrt{6}}(0-4-2)=-\sqrt{6}$

   Wegen der Definition der Richtungsableitung

   $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}_0):=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}_0):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}_0+h\,\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$

   sollte es sich bei $\boldsymbol{a}$ um eine Abstiegsrichtung handeln!

c)

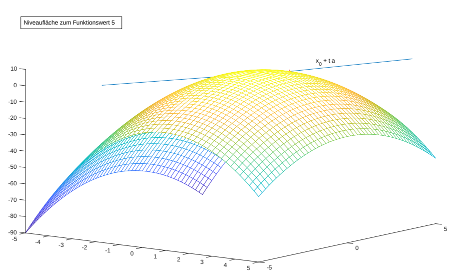
$$f(\boldsymbol{x}_0 + \frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{11}{4} < 5\,.$$

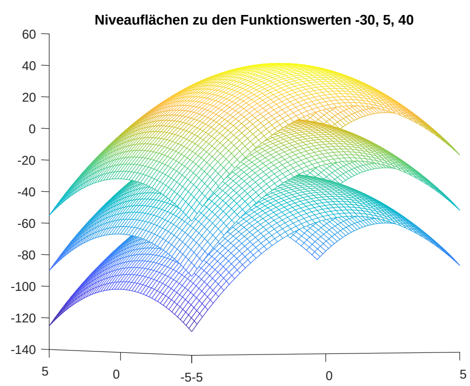
$$f(\boldsymbol{x}_0 + 2\sqrt{6}\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = 5\,.$$

$$f(\boldsymbol{x}_0 + 3\sqrt{6}\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} = 14 > 5\,.$$

Offensichtlich wird ausgehend von $\boldsymbol{x}_0$ der Funktionswert bei einem Schritt der Länge $\frac{\sqrt{6}}{2}$ in Richtung $\boldsymbol{a}$ kleiner. Geht man allerdings weiter in Richtung $\boldsymbol{a}$, so erreicht man für die Schrittlänge $2\sqrt{6}$ wieder den Funktionswert 5. Entfernt man sich noch weiter von $\boldsymbol{x}_0$ so steigt der Funktionswert über $f(\boldsymbol{x}_0)$.

Merke: Aussagen über Anstieg, Abstieg etc. sind in der Regel nur lokale Aussagen. Sie gelten nur für hinreichend kleine Schritte!





Aufgabe 2:

Gegeben sind die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}}$ zweidimensionaler Strömungen. Es gelte $r = \sqrt{x^2+y^2}$ sowie $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

a) $u = \epsilon x, \quad v = \epsilon y$

b) $u = \epsilon \dfrac{x}{r^2}, \quad v = \epsilon \dfrac{y}{r^2}, \ (x,y) \neq (0,0)$ (isolierte Quelle)

c) $u = \epsilon \dfrac{-y}{r^2}, \quad v = \epsilon \dfrac{x}{r^2}, \ (x,y) \neq (0,0)$ (isolierter Wirbel)

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u, \ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$).

Lösung zu 2: [2+ 4+ 4 Punkte]

a) Es gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Dies ist eine separierbare Differentialgleichung für y mit den Lösungen $y(x) = k \cdot x$. Die Stromlinien sind Strahlen ausgehend vom Ursprung. Sie werden mit der Geschwindigkeit $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\epsilon x)^2 + (\epsilon y)^2} = \epsilon r$ durchlaufen.

Man sieht sofort:

$$u_x = \epsilon, \qquad v_y = \epsilon \text{ und damit div } (u,v) = 2\epsilon\,.$$
$$u_y = 0, \qquad v_x = 0 \text{ und damit rot } (u,v) = 0\,.$$

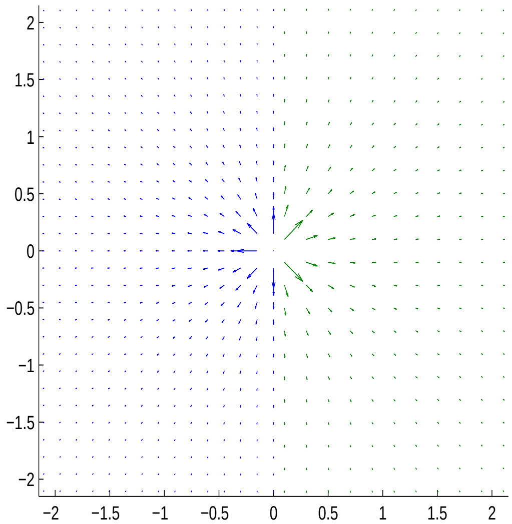
b) Es gilt wieder $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ und damit wieder $y(x) = k \cdot x$. Die Stromlinien sind wieder Strahlen ausgehend vom Ursprung. Sie werden hier aber mit der Geschwindigkeit ϵ/r durchlaufen.

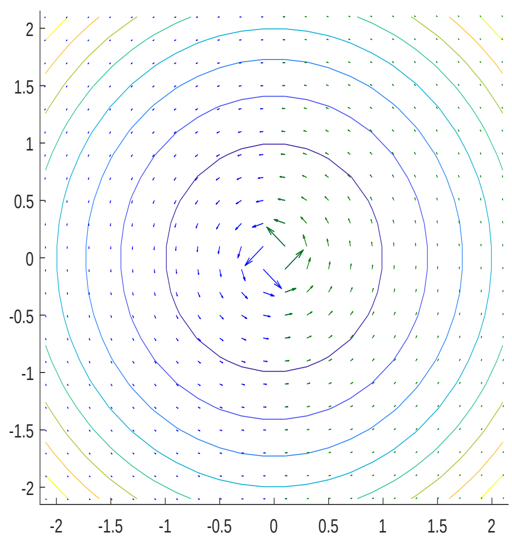
Man rechnet leicht nach:

$$u_x = \epsilon \frac{y^2 - x^2}{r^4}, \qquad v_y = \epsilon \frac{x^2 - y^2}{r^4} \text{ und damit div } (u,v) = 0\,.$$
$$u_y = \epsilon \frac{-2xy}{r^4}, \qquad v_x = \epsilon \frac{-2xy}{r^4} \text{ und damit rot } (u,v) = 0\,.$$

c) Es gilt $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Dies ist eine separierbare Differentialgleichung für y mit den Lösungen $(y(x))^2 = k - x^2$. Die Stromlinien sind Kreise um Null. Sie werden in mathematisch positiver Richtung durchlaufen. Die Geschwindigkeit beträgt wieder ϵ/r. Bis auf ein Vorzeichen sind nur die Rollen von u und v vertauscht, daher ergibt sich schnell

$$u_x = \epsilon \frac{2xy}{r^4}, \qquad v_y = \epsilon \frac{-2xy}{r^4} \text{ und damit div } (u,v) = 0\,.$$
$$u_y = \epsilon \frac{-x^2 + y^2}{r^4}, \qquad v_x = \epsilon \frac{y^2 - x^2}{r^4} \text{ und damit rot } (u,v) = 0\,.$$





Abgabetermine: 15.–19.11.21