Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Abbildungen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := 3x - 5y, \qquad g(x,y) := \frac{1}{5}(x^2+y^2) + 1\,.$$

a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

b) Zeichnen Sie für f die Höhenlinien $f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_1 = 5$, $C_2 = 0$ und $C_3 = -10$.
Heften Sie in den Punkten $P_1 = \binom{0}{-1}$, $P_2 = \binom{5}{3}$ und $P_3 = \binom{-5}{-1}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

c) Zeichnen Sie für g die Höhenlinien $g^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : g(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_4 = \frac{6}{5}$, $C_5 = \frac{21}{5}$ und $C_6 = 6$.
Heften Sie in den Punkten $P_4 = \binom{0}{-1}$, $P_5 = \binom{4}{0}$ und $P_6 = \binom{3}{4}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

d) Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

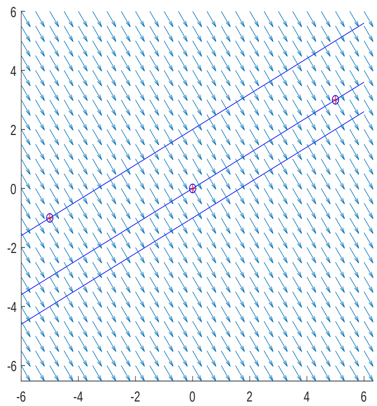
Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

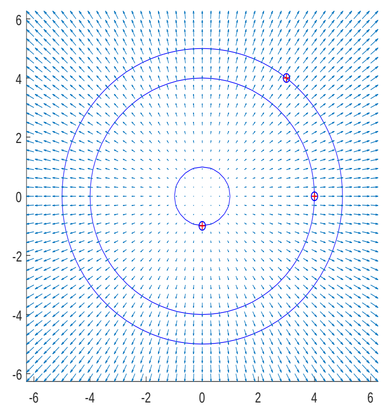
a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (3,-5)$.
$\operatorname{grad} g(x,y) = \frac{1}{5}\,(2x,\, 2y)$

b) Die Höhenlinien zu f sind die Geraden $y = \frac{3}{5}\,x - \frac{C}{5}$.
Die Höhenlinien zu den vorgegebenen Werten sind Geraden mit Steigung $\frac{3}{5}$ durch die vorgegebenen Punkte.
Die Gradienten haben alle die gleiche Richtung und stehen senkrecht auf den Höhenlinien.

c) Die Höhenlinien zu g sind Kreise um den Nullpunkt.
Die Höhenlinien zu den vorgegebenen Werten sind wieder die Kreise um Null, die durch die vorgegebenen Punkte gehen. Also die Kreise mit Radius $1, 4, 5$.
Die Gradienten haben die gleiche Richtung wie die Ortsvektoren.

d) Die Gradienten stehen senkrecht auf den Höhenlinien.





Aufgabe 2:

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; \cos(2x-3y)\,+\,x^3\,-\,y^3\,+\,2y^2\,.$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f\,:\,D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z \;=\; f(x^0,y^0)\,+\,f_x(x^0,y^0)\,(x-x^0)\,+\,f_y(x^0,y^0)\,(y-y^0)\,.$$

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(x^0,y^0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ an.

Lösung zur Aufgaben 2:

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \cos(2x-3y)\,+\,x^3\,-\,y^3\,+\,2y^2\,,\\
f_x(x,y) &= -2\sin(2x-3y)\,+\,3x^2\,,\\
f_y(x,y) &= 3\sin(2x-3y)\,-3y^2\,+\,4y\,,\\
f_{xx}(x,y) &= -4\cos(2x-3y)\,+\,6x\,,\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y)\,=6\cos(2x-3y)\,,\\
f_{yy}(x,y) &= -9\cos(2x-3y)\,-6y\,+4\,,\\
f_{xxx}(x,y) &= 8\sin(2x-3y)\,+6\,,\\
f_{xxy}(x,y) &= f_{xyx}(x,y)\,=\,f_{yxx}(x,y)\,=\,-12\,\sin(2x-3y)\,,\\
f_{xyy}(x,y) &= f_{yxy}(x,y)\,=\,f_{yyx}(x,y)\,=\,18\,\sin(2x-3y)\,,\\
f_{yyy}(x,y) &= -27\,\sin(2x-3y)-6\,.
\end{aligned}$$

b) $f(x,y) = \cos(2x-3y)\,+\,x^3\,-\,y^3\,+\,2y^2, \qquad f(\frac{\pi}{4},0) = \frac{\pi^3}{64}\,,$

$f_x(x,y) \;=\; -2\sin(2x-3y)\,+\,3x^2, \qquad f_x(\frac{\pi}{4},0) \;=\; -2+\,\frac{3\pi^2}{16}\,,$

$f_y(x,y) \;=\; 3\sin(2x-3y)\,-\,3y^2\,+\,4y, \qquad f_y(\frac{\pi}{4},0) \;=\; 3\,,$

Tangentialebene: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\,.$

$z = \frac{\pi^3}{64}\,+\,\frac{3\pi^2-32}{16}\,(x-\frac{\pi}{4}) + 3y\,.$