

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktionen:

$$s(x, y, z) := xyz \sin(x + y + z), \quad g(x, y, z) := \frac{\cos^2(x)e^y}{z}.$$

- b) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = \arctan(x)e^y + \sin(x) \ln(1 + y^2)z + x^2e^{z^2}$$

die Ableitung f_{xyz} sowie $\nabla f(x, y, z)$.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1: [Punkte 3+4+3]

- a)

$$s(x, y, z) := xyz \sin(x + y + z),$$

$$s_x(x, y, z) = yz \sin(x + y + z) + xyz \cos(x + y + z)$$

$$s_{xx}(x, y, z) = 2yz \cos(x + y + z) - xyz \sin(x + y + z)$$

$$s_{xy}(x, y, z) = (z - xyz) \sin(x + y + z) + (xz + yz) \cos(x + y + z)$$

Alle anderen Ableitungen ergeben sich sofort aus Symmetriegründen denn die Variablen x, y, z sind vertauschbar. Man erhält also zum Beispiel durch vertauschen der Rollen von x und z :

$$s_{zy}(x, y, z) = s_{yz}(x, y, z) = (x - xyz) \sin(x + y + z) + (xz + yx) \cos(x + y + z)$$

Oder zur Berechnung von s_{yy} durch vertauschen der Rollen von x und y in s_{xx}

$$s_{yy}(x, y, z) = 2xz \cos(x + y + z) - xyz \sin(x + y + z)$$

Zur Berechnung von s_{xz} tauscht man in s_{xy} die Rollen von y und z :

$$s_{xz}(x, y, z) = (y - xyz) \sin(x + y + z) + (xy + yz) \cos(x + y + z)$$

und so weiter.

Ein Ableiten von $g(x, y, z) = \frac{\cos^2(x)e^y}{z}$ nach y verändert die Funktion nicht. Daher gilt:

$$g_x(x, y, z) = \frac{-2 \cos(x) \sin(x) e^y}{z}$$

$$g_y(x, y, z) = g(x, y, z) = \frac{\cos^2(x) e^y}{z}$$

$$g_z(x, y, z) = g_{zy}(x, y, z) = -\frac{\cos^2(x) e^y}{z^2}.$$

$$g_{xx}(x, y, z) = \frac{(-2 \cos^2(x) + 2 \sin^2(x)) e^y}{z}, \quad g_{xy}(x, y, z) = g_x(x, y, z),$$

$$g_{xz}(x, y, z) = \frac{2 \cos(x) \sin(x) e^y}{z^2}, \quad g_{yx}(x, y, z) = g_x(x, y, z),$$

$$g_{yy}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad g_{yz}(x, y, z) = g_z(x, y, z),$$

$$g_{zx}(x, y, z) = g_{xz}(x, y, z), \quad g_{zy}(x, y, z) = g_z(x, y, z),$$

$$g_{zz}(x, y, z) = \frac{2 \cos^2(x) e^y}{z^3}$$

b) Zur Berechnung der dritten Ableitung f_{xyz} von

$$f(x, y, z) = \arctan(x)e^y + \sin(x) \ln(1 + y^2)z + x^2 e^{z^2}$$

macht es sinn zuerst nach y oder z abzuleiten. Zum Beispiel so:

$$f_z(x, y, z) = 0 + \sin(x) \ln(1 + y^2) + 2zx^2 e^{z^2}$$

$$f_{yz}(x, y, z) = \sin(x) \frac{2y}{1 + y^2} + 0$$

$$f_{xyz}(x, y, z) = \frac{2y \cos(x)}{1 + y^2}.$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^y}{1+x^2} + \cos(x) \ln(1 + y^2)z + 2xe^{z^2} \\ \arctan(x)e^y + \sin(x) \frac{2yz}{1+y^2} \\ \sin(x) \ln(1 + y^2) + 2zx^2 e^{z^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Die Funktion

$$u(x, t) := \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten $u(x, 0) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right)$, $u_t(x, 0) = 0$.

- Berechnen Sie die Auslenkung in den Endpunkten der Saite, die sogenannten Randdaten $u(0, t)$ und $u(L, t)$.
- Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ erfüllt.
- Versuchen Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$ zu skizzieren.
Hinweis: $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

- $u(0, t) = u(L, t) = 0$.
- Ableitungen ausrechnen und einsetzen!

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right] \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{\pi}{L} \cdot \frac{2\pi}{L} \left[-\sin \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right] \\ u_t(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2c\pi}{L} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right] \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{c\pi}{L} \cdot \frac{2c\pi}{L} \left[-\sin \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right] = c^2 u_{xx}(x, t) \end{aligned}$$

- Mit Hilfe des Hinweises: $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$ erhalten wir

$$u(x, t) := \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{L}(x + ct) \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right) \right] = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{2c\pi t}{L} \right)$$

$$u(x, 0) = \sin \left(\frac{2\pi}{L}x \right) \cos(0) = \sin \left(\frac{2\pi}{L}x \right)$$

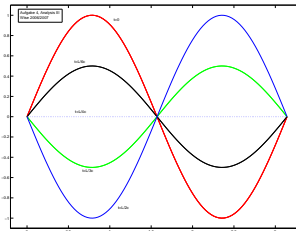
$$u(x, \frac{L}{6c}) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{2c\pi L}{6cL} \right) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} u(x, 0)$$

Analog rechnet man

$$u(x, \frac{L}{4c}) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{L} \cdot c \cdot \frac{L}{4c} \right) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$u(x, \frac{L}{3c}) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} u(x, 0)$$

$$u(x, \frac{L}{2c}) = \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \cos(\pi) = -u(x, 0)$$



$$u\left(x, \frac{L}{c}\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(2\pi) = u(x, 0).$$