Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sind die Mengen

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 < 4 \right\},$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \right\},$$

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, x, y, z \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, x, y, z \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\},$$

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \cdot (1, 2)^T = 1 \right\},$$

$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y, z) \cdot (1, 2, 1)^T < 1 \right\},$$

$$M_8 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, x, y, z \in \mathbb{R},\, z = x^2 + y^2 \right\}.$$

$$M_9 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, (x+3)^2 + y^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, (x-3)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

a) Geben Sie die Randpunkte der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ an.

b) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind offen, welche sind abgeschlossen?

c) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind beschränkt?

d) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind zusammenhängend, welche sind konvex?

Lösung 1:

a)

$$\partial M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Kreisrand,}$$

$$\partial M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 4 \right\} \qquad \text{Kreisrand,}$$

$$\partial M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 \in \{1, 4\} \right\} \qquad \text{Ringrand,}$$

$$\partial M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Zylindermantel,}$$

$$\partial M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \qquad \text{Kugeloberfläche,}$$

$$\partial M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x, y) \cdot (1, 2)^T = 1 \right\} \qquad \text{Gerade,}$$

$$\partial M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x, y, z) \cdot (1, 2, 1)^T = 1 \right\} \qquad \text{Ebene,}$$

$$\partial M_8 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; z = x^2 + y^2 \right\} \qquad \text{Paraboloid,}$$

$$\begin{aligned} \partial M_9 := &\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; (x+3)^2 + y^2 = 1 \right\} \\ \cup &\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; (x-3)^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Zwei Kreise.} \end{aligned}$$

b) M_1 : Abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius 1 um Null.

M_2 : Offene Kreisscheibe mit Radius 2 um Null

.

M_3 : Ring mit Innenradius 1 und Außenradius 2 um Null. Weder offen noch abgeschlossen.

M_4 : Das Komplement ist offen. Abgeschlossener unendlich langer Zylinder.

M_5 : Offene Kugel mit Radius 1 um Null.

M_6 : Gerade im $\mathbb{R}^2$, abgeschlossen.

M_7 : Halbraum im $\mathbb{R}^3$ begrenzt durch eine Ebene, die nicht zur Menge gehört, also offen.

M_8 := Das Komplement ist offen. Fläche im $\mathbb{R}^3$, abgeschlossen,

M_9 : Zwei abgeschlossene Kreisscheiben mit Radius 1 um $(-3,0)^T$ und $(3,0)^T$. Abgeschlossen.

c) Die Mengen M_1, M_2, M_3, M_5 und M_9 sind Teilmengen geeigneter Kugeln um Null, also beschränkt.

Die Mengen M_4, M_6, M_7 und M_8 passen in keine Kugel um Null, sie sind nicht beschränkt.

d) Alle Mengen bis auf M_9 sind zusammenhängend: Je zwei Punkte der Menge können mit einer Kurve, die ganz in der Menge verläuft, verbunden werden. Für M_9 trifft dies nicht zu. Beispiel: $(-2,0)^T$ und $(2,0)^T$.

M_3 ist nicht konvex. Zum Beispiel die Verbindungsstrecke zwischen $(-1,0)^T$ und $(1,0)^T$ liegt nicht in M_3.

M_8 ist nicht konvex. Zum Beispiel die Verbindungsstrecke zwischen $(-1,0,1)^T$ und $(1,0,1)^T$ liegt nicht in M_8.

M_9 ist nicht zusammenhängend, also auch nicht konvex.

Alle anderen Mengen sind konvex.

Aufgabe 2: Skizzieren Sie für die unten angegebenen Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3, 4$ Ausschnitte einiger Höhenlinien (Kurven entlang derer die Funktion konstant ist)

$$f_k^{-1}(C) := \{(x, y)^{\mathrm{T}} : \ f(x, y) = C\}$$

von f_k für verschiedene Werte von C

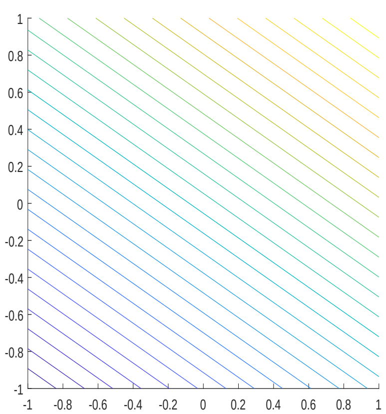
a) $f_1(x, y) \ = \ 2x \ + \ 3\,y,$ b) $f_2(x, y) \ = \ x^2 \ + \frac{y^2}{9},$

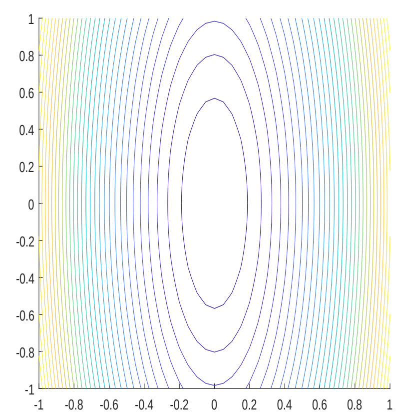
c) $f_3(x, y) \ = \ \cos(x \ - y^2)\,,$ d) $f_4(x, y) \ = \ \exp(x \cdot y)\,.$

Lösung 2:

a) Höhenlinien zu $f_1 : \ 2x \ + \ 3\,y = C \ \longrightarrow$ parallele Geraden $y = \frac{C-2x}{3}$.

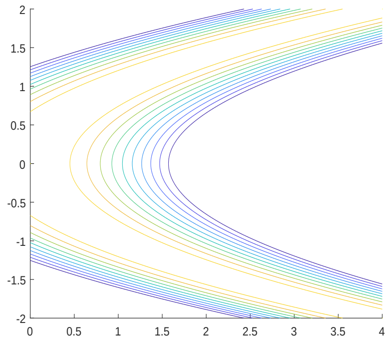
b) Die Höhenlinien zu f_2 sind Ellipsen um den Nullpunkt. Die Achse in $y-$ Richtung ist jeweils drei Mal so lang wie die Achse in $x-$ Richtung.

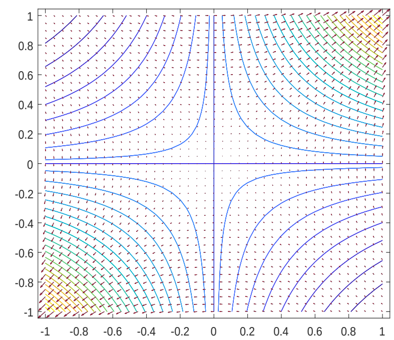




c) Die Höhenlinien zu f_3 sind Parabeln $x = y^2 + c$, deren Symmetrieachsen auf der $x-$ Achse liegen.

d) Für $x = 0$ oder $y = 0$ erhält man den Funktionswert 1. Die Koordinatenachsen sind also Höhenlinien zum Funktionswert 1. Die anderen Höhenlinien zu f_4 sind Hyperbeläste, die sich aus $y = C/x$ für $x \neq 0$ bzw. $x = C/y$ für $y \neq 0$ ergeben.





Bearbeitungstermine: 18.–22.10.21