Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. I. Gasser

WiSe 2021/2022

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)
28. Februar 2022

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) := x^4 - 4xy^3 + 12y + 1\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

b) Berechnen Sie die stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

a) **(2 Punkte)**

grad $f(x,y) = (f_x(x,y),\ f_y(x,y))$.

$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y^3$,

$f_y(x,y) = -12xy^2 + 12$.

Hessematrix: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -12y^2 \\ -12y^2 & -24xy \end{pmatrix}$.

b) **(3 Punkte)**

Stationäre Punkte: $f_x = f_y = 0$.

$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y^3 = 0 \iff x = y$,

$f_y(x,y) = -12xy^2 + 12 = 0$ und $x = y \iff y^3 = 1$

Es gibt also genau einen stationären Punkt, nämlich $P := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für die Hessematrix $Hf(P) = Hf(1,1)$ erhält man

det $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & -24 \end{pmatrix} = -12 \cdot 24 - 12 \cdot 12 < 0.$

Die Matrix hat einen positiven Eigenwert und einen negativen Eigenwert.
Es handelt sich um ein Sattelpunkt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Durch

$$f(x,y) := x^2 - x^2 y + \frac{y^3}{3} - 1 = 0.$$

ist implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ definiert.
Zeigen Sie, dass es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion g gibt, so dass in der Umgebung von $P_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x), \qquad g(2) = 3\,.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades (die Tangente) von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Lösung 2:

$$f(2,3) := 2^2 - 2^2 \cdot 3 + \frac{3^3}{3} - 1 = 0$$

$$f_y(x,y) = -x^2 + y^2, \qquad f_y(2,3) = -2^2 + 3^2 \neq 0$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt mit einer geeigneten Funktion g lokal:

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x),\ g(2) = 3\,, \qquad g'(x) = -\frac{f_x}{f_y}\,.$$

Mit $\qquad f_x(x,y) = 2x - 2xy, \qquad f_x(2,3) = 4 - 12 = -8\,.$

Für die Linearisierung rechnet man also $\qquad g'(2) = -\dfrac{4 - 4\cdot 3}{-2^2 + 3^2} = \dfrac{8}{5}\,.$

Also erhält man $\qquad T_1(x) = g(2) + g'(2)(x-2) = 3 + \dfrac{8}{5}(x-2)\,.$

Aufgabe 3: (5+2 Punkte)

a) Gegeben sei

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 25,\, x \ge 0,\, y \ge 0 \right\},$$

sowie das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2y + e^{\tan(x)} \\ xy^2 + \tan(e^y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie rot $f(x,y)$ sowie das Integral $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y)$, wobei ∂D den positiv orientierten Rand von D bezeichnet.

b) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 + 2xz \\ x^2 + z^2 - 2yz \\ x^2 + y^2 - 2xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie div $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ und den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Oberfläche der Kugel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \le 1 \right\}.$$

Lösungsskizze

a) **(5 Punkte)**

$$\text{rot } \boldsymbol{f}(x,y) = (f_2)_x - (f_1)_y = y^2 + x^2. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Nach dem Greenschen Satz gilt:

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y) = \int_D \text{rot} f(x,y)\, d(x,y) \qquad \textbf{(Ansatz: 1 Punkt)}$$

und mit $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ 0 \le r \le 5,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\text{rot } \boldsymbol{f}(x,y) = (f_2)_x - (f_1)_y = y^2 + x^2 = r^2 \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

$$\int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot r\, d\phi\, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^5 r^3\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5^4}{4} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

b) **(2 Punkte)**

$$\text{div } \boldsymbol{f}(x,y,z) = 2z - 2z + 0 = 0$$

Aus dem Satz von Gauß folgt, dass der Fluss durch die Oberfläche der angegebenen Kugel Null ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktion

$$\boldsymbol{f} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; (-xy\;,\; x^2\;,\; z)^T$$

und die Kurve

$$\boldsymbol{c} \;:\; [0\,,\,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{c}\,(t) \;=\; (2\cos(t),\, 2\sin(t),\, t)^T.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)d(x,y,z)\,.$$

Lösungsskizze:

(4 Punkte)

$$\begin{aligned}
\int_c \boldsymbol{f}(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} <\; \boldsymbol{f}(c(t)), \dot{c}(t) \;>\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} -4\sin(t)\,\cos(t) \\ 4\cos^2(t) \\ t \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} > dt \qquad \textbf{(2 Punkte)} \\
&= \int_0^{2\pi} 8\sin^2(t)\,\cos(t) \;+\; 8\cos^2(t)\cos(t) + t\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} t \;+\; 8\cos(t)\,\left(\cos^2(t) \;+\sin^2(t)\right)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} t \;+\; 8\cos(t)\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - 8\sin(t)\right]_0^{2\pi} \;=\; 2\pi^2\,. \textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$