

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)

28. Februar 2022

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Stg:

AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	
-----	----	----	----------	----	-----	-----	-----------	-----	----	------------	----	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^4 - 4xy^3 + 12y + 1.$$

- a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .
- b) Berechnen Sie die stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Durch

$$f(x, y) := x^2 - x^2y + \frac{y^3}{3} - 1 = 0$$

ist implizit eine Kurve im \mathbb{R}^2 definiert.

Zeigen Sie, dass es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion g gibt, so dass in der Umgebung von $P_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgende Äquivalenz gilt

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x), \quad g(2) = 3.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades (die Tangente) von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Aufgabe 3: (5+2 Punkte)

a) Gegeben sei

$$\mathbf{D} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0 \right\},$$

sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2y + e^{\tan(x)} \\ xy^2 + \tan(e^y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{rot} \mathbf{f}(x, y)$ sowie das Integral $\int_{\partial D} \mathbf{f}(x, y) d(x, y)$,
wobei ∂D den positiv orientierten Rand von \mathbf{D} bezeichnet.

b) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 + 2xz \\ x^2 + z^2 - 2yz \\ x^2 + y^2 - 2xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{div} \mathbf{f}(x, y, z)$ und den Fluss von \mathbf{f} durch die Oberfläche der Kugel

$$\mathbf{K} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y, z) = (-xy, x^2, z)^T$$

und die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)^T.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z).$$

