Fachbereich Mathematik **SoSe 2022**
Prof. Dr. I. Gasser

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)
06. September 2022

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (3+1 Punkte)

Gesucht ist ein lokales Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 + 4y^2 - 6x + 24y + 6.$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := \cos(\frac{x-3}{2}) + \sin(y+1) - 1 = 0.$$

$P_0 = (3, -1)^T$ ist ein zulässiger Punkt, in dem die Regularitätsbedingung erfüllt ist. Diese Information können Sie ohne Überprüfung verwenden.

a) Weisen Sie nach, dass P_0 für einen geeigneten Multiplikator ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $P_0 = (3, -1)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung $g = 0$ vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösung:

a) **(3 Punkte)** $F := f + \lambda\, g$.
grad $F(x,y) = (F_x(x,y),\, F_y(x,y))$.

$$F_x(x,y) = 2x - 6 + \lambda(-\sin(\tfrac{x-3}{2})\tfrac{1}{2}),$$
$$F_y(x,y) = 8y + 24 + \lambda\cos(y+1).$$

$$F_x(3,-1) = 6 - 6 - \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$F_y(3,-1) = -8 + 24 + \lambda \cdot 1 = 0 \iff \lambda = -16.$$

P_0 ist also ein stationärer Punkt der Funktion $F := f - 16g$.

b) Hessematrix von $F := f + \lambda g$:

$$HF(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 2 - \lambda(\cos(\frac{x-3}{2})\frac{1}{4}) & 0 \\ 0 & 8 - \lambda\sin(y+1) \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda = -16$ erhalten wir:

$$HF(3,-1) = \begin{pmatrix} 2+4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat zwei positive Eigenwerte. Es handelt sich also um ein (lokales) Minimum.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := y\cos(x) + x\sin(y) + 2.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in D := [-0.3,\, 0.3] \times [-0.3,\, 0.3]$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{100}.$$

Lösung:

a) (3 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y\cos(x) + x\sin(y) + 2 & f(0,0) &= 2\\
f_x(x,y) &= -y\sin(x) + \sin(y) & f_x(0,0) &= 0\\
f_y(x,y) &= \cos(x) + x\cos(y) & f_y(0,0) &= 1\\
f_{xx}(x,y) &= -y\cos(x) & f_{xx}(0,0) &= 0\\
f_{xy}(x,y) &= -\sin(x) + \cos(y) & f_{xy}(0,0) &= 1\\
f_{yy}(x,y) &= -x\sin(y) & f_{yy}(0,0) &= 0
\end{aligned}$$

$$T_2(x,y) = 2 + y + \frac{1}{2}(2xy) = 2 + y + xy.$$

b) **(3 Punkte)**

Für die Fehlerabschätzung berechnen wir für die Beträge aller dritten Ableitungen eine, für alle $(x,y) \in D$ gültige, gemeinsame obere Schranke.

$|\, f_{xxx}(x,y)\,| = |y\sin(x)\,| \leq |y| \cdot |\sin(x)| \leq \frac{3}{10}$

$|\, f_{xxy}(x,y)\,| = |-\cos(x)| \leq 1$

$|\, f_{xyy}(x,y)\,| = |-\sin(y)| \leq 1$

$|\, f_{yyy}(x,y)\,| = |-x\cos(y)\,| \leq \frac{3}{10}.$

Die Beträge aller dritten Ableitungen von f, in allen Punkten aus D, sind also nach oben beschränkt durch 1.

Der Fehler $|f(x,y) - T_2(x,y)|$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot \|(x,y)\|_\infty^3 \cdot C \leq \frac{8}{6} \cdot \frac{3^3}{10^3} \cdot 1 = \frac{4 \cdot 9}{10^3} < \frac{40}{1000} = \frac{4}{100}.$$

Aufgabe 3: (5+1+3+1 Punkte)

Gegeben sei die halbe Kugel $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \,,\; z \leq 0 \right\}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz + x \\ yz + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Hinweis: $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$.

b) Der Körper K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung für das ebene Flächenstück D an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück D.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M.

Lösungsskizze :

a) **[5 Punkte]**

div $\boldsymbol{f}(x,y,z) = z + 1 + z + 1 + 0 = 2z + 2$. **(1 Punkt)**

Zur Berechnung des Integrals nutzen wir Kugelkoordinaten und erhalten mit

$x = r\cos(\phi)\cos(\theta)\,, \quad y = r\sin(\phi)\cos(\theta)\,, \quad z = r\sin(\theta)\,,$
$0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$. **(1 Punkt)**

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\pi} (2r\sin(\theta) + 2)\cdot r^2\cos(\theta)\, d\phi\, d\theta\, dr \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$
$$= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(2r^3\sin(\theta)\cos(\theta) + 2r^2\cos(\theta)\right) [\phi]_0^{2\pi}\, d\theta\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(r^3\sin(2\theta) + 2r^2\cos(\theta)\right) d\theta\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left[-r^3\frac{\cos(2\theta)}{2} + 2r^2\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 -r^3\frac{1-(-1)}{2} + 2r^2(0-(-1))\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 -r^3 + 2r^2\, dr$$
$$= 2\pi \left[-\frac{r^4}{4} + \frac{2r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\left(-4 + \frac{16}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

(Rechnung 2 Punkte)

b) **[1 Punkt]**

Der Körper ist berandet durch ein ebenes Stück D (wie Deckel) mit der Parametrisierung:

$$p(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,2], \quad \phi \in [0,2\pi],$$

und der unteren Hälfte einer Kugeloberfläche M.

c) **[3 Punkte]**

Für den Fluss durch D rechnet man:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \qquad f(p(r,\phi)) = \begin{pmatrix} \text{egal} \\ \text{egal} \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$< f, \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \phi} >= r^3 .$$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \int_0^{2\pi} < f, \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \phi} > d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\phi dr = 2\pi \int_0^2 r^3 \, dr \\ &2\pi \frac{2^4}{4} = 8\pi . \end{aligned}$$

d) **[1 Punkt]**

Nach dem Satz von Gauß gilt:

Gesamtfluss durch Oberfläche von K = Fluss durch D + Fluss durch M
$= \int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z)$

Damit erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche M

$\frac{8\pi}{3} - 8\pi = -\frac{16\pi}{3}$.