

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei \mathbf{f} das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, \mathbf{c}_1 die Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$$

und \mathbf{c}_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\} = [0, 1] \times [0, 2].$$

(i) Besitzt f ein Potential?

(ii) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_i} \mathbf{f}(x, y) d(x, y).$$

(iii) Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} aus R heraus.

b) Sei $\tilde{\mathbf{f}}$ das Vektorfeld $\tilde{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix}$. \mathbf{c}_2 sei wie oben definiert und

$$\mathbf{c}_3(t) = (1, t^2) \quad t \in [0, 3]$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_2} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y), \quad \int_{\mathbf{c}_3} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y).$$

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq 0 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$.

- b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M . Geben Sie eine Parametrisierung von W an.
- c) Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} durch W , also

$$\int_W \mathbf{f} \cdot d\mathbf{O}.$$

- d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K , also

$$\int_M \mathbf{f} \cdot d\mathbf{O}?$$

Bearbeitungstermine: 24.01–26.01.22