Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1)

Durch die Relation

$$g(x,y) = \left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $(x,y) = (0,0)^T$ ein singulärer Punkt der implizit definierten Kurve

$$\left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist und stellen Sie fest, ob dies ein isolierter Punkt, ein Rückkehrpunkt oder ein Doppelpunkt ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine weiteren singulären Punkte gibt.

c) Berechnen Sie die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Aufgabe 2: Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 2\ln\left(\frac{x}{y}\right) + x + 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x\,y - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ mit einem geeigneten festen λ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F = f + \lambda g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H_x}\,F(x_0,y_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $\ker\left(Dg(x_0,y_0)\right)$.

Aufgabe 3) Berechnen Sie

a) das Integral

$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1,3] \times [1,2],$$

b) das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; |x| \le 1, \;\; -(1-x^2) \le y \le 1-x^2, \;\; 0 \le z \le \big(1-x^2-y\big) \right\},$$

c) und das Integral

$$\int\int_{D_2} (x^2 - y^4) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrien aus!

Abgabetermine: 13.12.–17.12.21