**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

# Analysis III
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 4, Hausaufgaben

**Aufgabe 1) [12 Punkte]** Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) \; = x \cdot \arctan(y) + e^{x+y} - 1 .$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2$ von $f$ mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x,y) = f(x,y) - T_2(x,y)$ im Bereich $|x| \le 0.1$, $|y| \le 0.1$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \le 0.006 .$$

c) Bestimmen Sie den stationären Punkt von $T_2$ und prüfen Sie, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

**Hinweise:** $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) = 0$.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei $f(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0$.

a) (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $f(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (2,-2)^T$ nach $y$ aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von $x_0$ bzw. $y_0$ folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x) .$$

(ii) Berechnen Sie das Taylor Polynom ersten Grades der Funktion $g$ aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$f(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0,y_0,z_0)^T := (0,1,1)^T$ nach $x$ aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(y,z)$ mit $g(1,1) = 0$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von $x_0, y_0, z_0$ folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y,z) = 0 \iff x = g(y,z) .$$

Nach welcher(n) anderen Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

**Abgabetermine:** 29.11.–03.12.21