Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := 2x^2 + y^2 - 4x + z$ sowie der Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2, 3)^T$ und die Richtung $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, -2)$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}_0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}_0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, -2)^{\mathrm{T}}$.

Können Sie entscheiden, ob es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt? Können Sie also entscheiden, ob die Funktionswerte steigen oder fallen wenn man von $\boldsymbol{x}_0$ aus in Richtung $\boldsymbol{a}$ geht?

c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{a})$ für $t = \frac{\sqrt{6}}{2}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}$. Ergibt sich da nicht ein Widerspruch zu ihrem Ergebnis aus b?

Aufgabe 2:

Gegeben sind die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x, y), v(x, y))^{\mathrm{T}}$ zweidimensionaler Strömungen. Es gelte $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ sowie $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

a) $u = \epsilon x, \quad v = \epsilon y$

b) $u = \epsilon \dfrac{x}{r^2}, \quad v = \epsilon \dfrac{y}{r^2}, \ (x, y) \neq (0, 0)$ (isolierte Quelle)

c) $u = \epsilon \dfrac{-y}{r^2}, \quad v = \epsilon \dfrac{x}{r^2}, \ (x, y) \neq (0, 0)$ (isolierter Wirbel)

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y'(x) = v(x, y)/u(x, y)$).

Abgabetermine: 15.–19.11.21