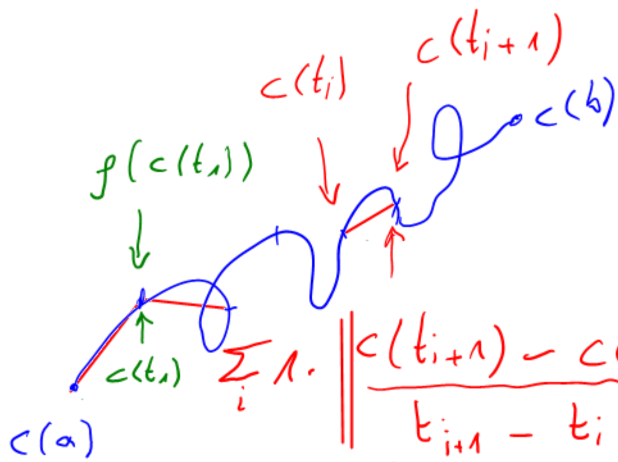
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 7 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Sätze von Green und Gauß



$$\sum_i 1\cdot \left\|\underbrace{\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{t_{i+1}-t_i}}_{\dot c(t)}\right\|_2 \cdot \overset{\Delta t}{(t_{i+1}-t_i)} \longrightarrow \int_a^b 1\cdot\|\dot c(t)\|\,dt = \text{Länge } c$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(c(t_i)) \left\|\frac{c(t_{i+1})-c(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right\| (t_{i+1}-t_i)$$

Kurvenintegrale

$\longrightarrow \quad \int_a^b g(c(t)) \, \|\dot{c}(t)\| \, dt$

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stkw. C^1)

$\mathbf{c}(a) =$ Anfangspunkt, $\mathbf{c}(b) =$ Endpunkt.

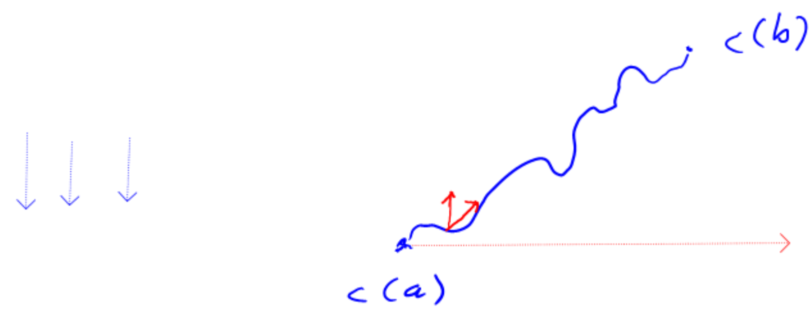
Kurvenintegral über skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{s} := \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral über Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_a^b \underbrace{< \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\cancel{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}} >}_{g(c(t))} \cancel{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} dt$$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.



Potentiale

im $\mathbb{R}^3$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(\;''\;) \\ f_3(\;''\;) \end{pmatrix}$$

$\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt **Potential** von $\boldsymbol{f}$, wenn $\forall \boldsymbol{x} \in D$:

$$\boxed{\nabla \cdot \phi(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} \phi(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^3$ heißt das

$$\boxed{\phi_x = f_1, \quad \phi_y = f_2, \quad \phi_z = f_3}$$

$$(f_2)_z - (f_3)_y$$

$$= (\phi_y)_z - (\phi_z)_y$$

$$= \phi_{yz} - \phi_{zy}$$

Zur Erinnerung: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \forall\, C^2$ Funktionen ϕ

Es kann also nur dann ein Potential geben, wenn $\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0}$ gilt.

Rotation des Vektorfeldes bei n=3

$$\textbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \textbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

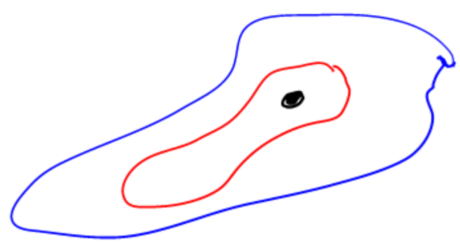
Rotation des Vektorfeldes bei n=2: **rot** $\boldsymbol{f}(x,y) := \underline{(f_2)_x - (f_1)_y}$

$$\boxed{\text{rot}\,\boldsymbol{f} \neq 0 \implies \text{Es gibt kein Potential}}$$

$\mathbb{R}^n$:
(Jf) nicht symmetrisch
$\Longrightarrow \nexists$ Potential

Integrabilitätsbedingung:

$$\boxed{D \text{ einfach zusammenhängend:}\ \ J\boldsymbol{f} \text{ symmetrisch} \iff \exists \text{ Potential}}$$



keine Löcher

Jede geschlossene Kurve lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen

Konstruktion von ϕ

Beispiel 1) $\quad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - e^x z \\ 2x^3y + \sin z \\ y\cos z - e^x \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$

Falls $\exists$ Potential ϕ $\quad \phi_x = 3x^2y^2 - e^x z = f_1$

dann $\xrightarrow{\int dx}$ $\quad \phi(x,y,z) = x^3y^2 - e^x z + C(y,z) \quad (*)$

und $\quad \phi_y = x^3 \cdot 2y - 0 + C_y(y,z)$

andererseits $\quad \phi_y \overset{!}{=} f_2 = 2x^3y + \sin z$

$\Longrightarrow \quad C_y(y,z) \overset{!}{=} \sin(z) \xrightarrow{\int dy} C(y,z) = y \cdot \sin(z) + \tilde{C}(z)$

also $\xrightarrow{*}$ $\quad \phi(x,y,z) = x^3y^2 - e^x z + y\sin z + \tilde{C}(z)$

$\downarrow \partial/\partial z$

und $\phi_z = y\cos z - e^x + \tilde{C}'(z)$

andererseits $\phi_z \stackrel{!}{=} f_3 = y\cos z - e^x$

$\Longrightarrow$ $\tilde{C}'(z) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \tilde{C}(z) = k$

also $\phi(x, y, z) = x^3y^2 - e^x z + y\sin z + k \qquad k \in \mathbb{R}$

Beispiel 2) $\quad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + \dfrac{3x^2}{1+x^3} \cdot \cos(y) \\ x^2 + \ln(1+x^3) \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0$

Existiert also ein Potential ?

Das sieht kompliziert aus! Lohnt sich der Versuch des Integrierens?

$(f_2)_x - (f_1)_y$

$$\begin{aligned} \text{rot}\, \boldsymbol{f}(x,y) &= (f_2)_x - (f_1)_y \\ &= \cancel{2x} + \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot \sin(y) \\ &\quad \cancel{- 2x} - \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot (-\sin(y)) \\ &\neq 0 \qquad \forall (x,y). \end{aligned}$$

Es gibt kein Potential.

Beispiel 3) $D = \mathbb{R}^3$, $\qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\cos(x) \\ z\sin(x) + 2y + z \\ y\sin(x) + 2y \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (f_1)_y & (f_1)_z \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ldots\ldots & z\cos(x) & y\cos(x) \\ z\cos(x) & \ldots\ldots & \sin(x)+1 \\ y\cos(x) & \sin(x)+2 & \ldots\ldots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (f_3)_x & (f_3)_y & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \operatorname{grad}(f_1) \\ \leftarrow \operatorname{grad}(f_2) \\ \operatorname{grad}(f_3) \end{array}$$

$\sin(x)+1 \neq \sin(x)+2$

$\Longrightarrow$

∂f nicht symmetrisch

$\Longrightarrow \nexists$ Potential

Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} \,:\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stkw. C^1)

$$\mathbf{c}(a) = \text{Anfangspunkt}, \qquad \mathbf{c}(b) = \text{Endpunkt.}$$

Kurvenintegral über skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{s} \;:=\; \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral über Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

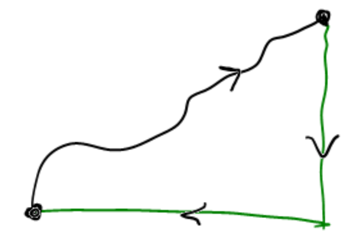
$$\boxed{W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} := \underline{\int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \; > dt} = \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} > \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt}$$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.

Hauptsatz: $\boxed{\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \phi = (\mathrm{grad}\,\phi)^T \implies \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \phi(c(b)) - \phi(c(a))}$

D.h. insbesondere: Kurvenintegral ist wegunabhänging und

$$\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \text{ geschlossenen } \mathbf{c}$$

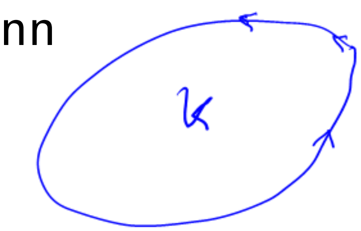


Satz von Green: $\boldsymbol{f}$: C^1 Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^2$: Gebiet

$K \subset D$: kompakt und bzgl. beider Variablen projizierbar

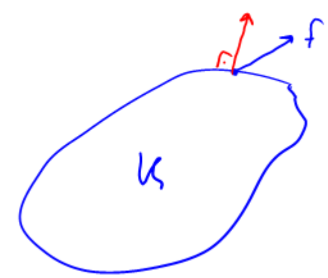
$c(t)$ stkw. C^1 Parametrisierung von ∂K, positiv umlaufen, dann

$$\boxed{\oint_{\substack{c \\ \| \\ \partial K}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, dx = \int_K \mathrm{rot}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, dx}$$

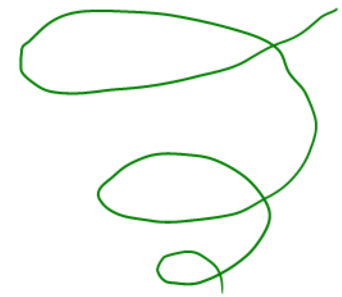


Für den **Fluss einer Strömung aus K heraus**:

$$\boxed{\oint_{\partial K} < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} > ds = \int_K \mathrm{div}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, dx}$$



Beispiel 1: (Wiederholungsklausur 08/09, Hinze, Kiani)



Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

auf c

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \quad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

$$(K_1)_z = -\frac{x}{z^2} \neq (K_3)_x = 2x \implies \nexists \text{ Potential}$$

Lösung:

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

NR

$$K(c(t)) = \begin{pmatrix} \frac{t\cos(t)}{t} \\ \frac{t\sin(t)}{t} \\ \underbrace{t^2\cos^2(t) + t^2\sin^2(t)}_{t^2(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = t^2} \end{pmatrix}$$

$$< K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)) > \;=< \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(t) - t\cdot\sin(t)\\ \sin(t)+t\cdot\cos(t)\\ 1\end{pmatrix} >$$

$$= (\underbrace{\cos^2(t) \cancel{- t\sin(t)\cos(t)} + \sin^2(t)}_{1} \cancel{+ t\sin(t)\cos(t)} + t^2)$$

$= 1 + t^2$

$$\int_1^3 < K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)) > \, dt = \int_1^3 (1+t^2)\, dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

Beispiel 2: (Klausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ \underline{xy^2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{—— } \phi_x \\ \text{—— } \phi_y \end{matrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

$(f_2)_x - (f_1)_y$
$= y^2 - 2y \neq 0$
$\Longrightarrow \nexists$ Potential zu f

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$(g_2)_x - (g_1)_y = 2y - 2y = 0$
$\Longrightarrow \exists\, \phi : \nabla\phi = f$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}.$$

$\phi_x = y^2 \longrightarrow \phi = xy^2 + c(y)$

$\longrightarrow \phi_y = 2xy + c'(y) \overset{!}{=} g_2$
$= 2xy$
$\longrightarrow c' = 0$

$\Rightarrow c = k$

Lösung:

a) $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2 \implies$

es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$.

$\phi(x, y) = xy^2$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$

x

y

$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \cos(t) \end{pmatrix}$

$< f(c(t)), \dot{c}(t) >$

$= \underline{\underline{t}}^2 (-\sin(t)) + \underline{\underline{t}}^2 \cos(t) \cdot 1$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{t^2}_{u}\overbrace{(\cos t - \sin t)}^{\dot v}\, dt$$

$\dot v(t) = \cos(t) - \sin(t)$

$v(t) = \sin(t) + \cos(t)$

$\dot z(t) = \cos(t) + \sin(t)$

$z(t) = \sin(t) - \cos(t)$

$$= \underbrace{\overset{u}{t^2}\overset{v}{(\cos t + \sin t)}\Big|_0^{2\pi}}_{4\pi^2(\cos(2\pi) + \sin(2\pi)) - 0} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\overset{\dot u}{2t}}_{w}\underbrace{\overset{v}{(\cos t + \sin t)}}_{\dot z}\, dt$$

$$= \underbrace{4\pi^2}_{} - [\overset{w}{2t}\overset{z}{(\sin t - \cos t)}]_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \overset{\dot w}{2}\overset{z}{(\sin t - \cos t)}dt}_{2(-\cos(t) - \sin(t)\,|_0^{2\pi})} = 4\pi^2 + 4\pi + 0$$

$4\pi(0-1) - 0$

Für $\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ gilt mit dem Potential $\phi(x,y) = xy^2$

$t \in [0, 2\pi]$

$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$

$c(b) = c(2\pi)$

$c(a) = c(0)$

$c(b) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ 2\pi \end{pmatrix}$

$c(a) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ 0 \end{pmatrix}$

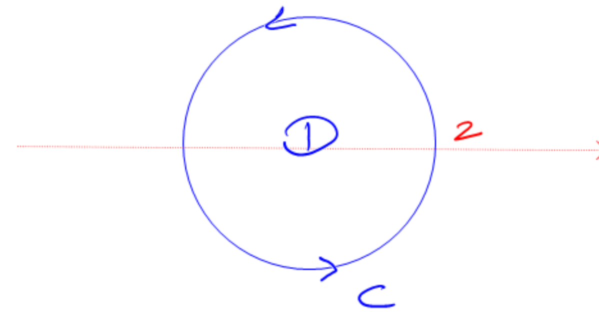
$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt$$

$$= \phi(\underbrace{\overbrace{\cos(2\pi)}^{1}, 2\pi}_{c(b)}) - \phi(\underbrace{\overbrace{\cos(0)}^{1}, 0}_{c(a)}) = 4\pi^2.$$

$$= \underbrace{1 \cdot (2\pi)^2}_{x \cdot y^2} - \underbrace{1 \cdot 0^2}_{x \cdot y^2}$$

Beispiel 3: Green (Klausure 07, Stuckmeier/Kiani)

Sei C der positiv orientierte Rand der Menge



$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} \le 4 \right\}.$$

≤ 4

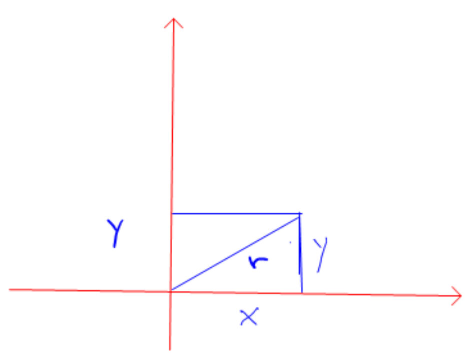
Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\, d(x,y)$ für das Vektorfeld

$\mathrm{rot}\, f = (f_2)_x - (f_1)_y$

$$= x^2 + y^2 = r^2$$

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \dfrac{y^3}{3} \\ \dfrac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

$$\int_{C=\partial D} f\, dx = \iint_D \mathrm{rot}\, f(x,y)\, d(x,y)$$



Lösung:

Da f selbst nicht sehr integrierfreundlich aussieht, dafür aber

$$\text{rot } f(x,y) = x^2 + y^2$$

verwendet man den Satz von Green und erhält

$$I := \int_{\partial D} f(x,y)ds \; = \; \int_D \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} d(x,y)$$

$0 \leq r \leq 2$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\phi\, dr \; = 2\pi \; \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 = 8\pi.$$

Beispiel 4: Gauß/Fluss (Klausur 06/07, Stuckmeier/Kiani) Gegeben seien die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

und das das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y}\cos y \\ 2y + e^{-x}\sin x \end{pmatrix}.$$

div f

$= (f_1)_x + (f_2)_y$

$= 1 + 2$

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{f}$ durch den Rand der Menge D.

Wie man der Skizze entnimmt gilt (vgl. Hausaufgabe 1, Blatt 6)

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; -2 \leq y \leq 2, \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

Grenze $\underbrace{\frac{y^2}{2} - 2}_{\text{parabel}} = x$

$y = \pm 2 \to x = 0$

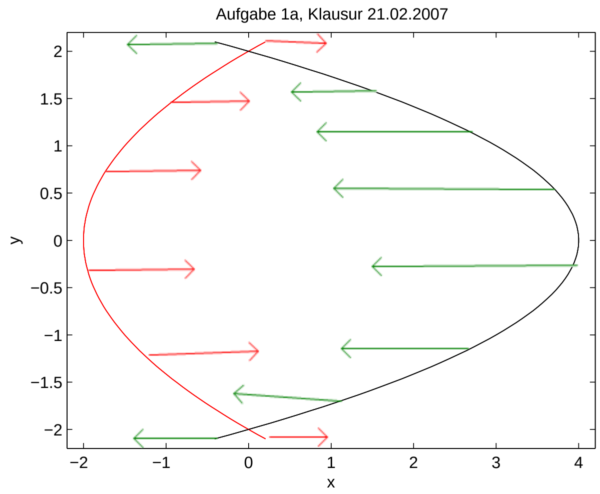
$y = 0 \to x = -2$

Grenze $x = 4 - y^2$

Parabel

$y = \pm 2 \to x = 0$

$y = 0 \to x = 4$



$x \geq \frac{y^2}{2} - 2$

$\longrightarrow$ x liegt rechts der parabel

$x \leq 4 - y^2$

x liegt links der Parabel

Der Fluss F ergibt sich nach dem Satz von Green/Gauß in der Ebene:

$\int_D \operatorname{div} f(x,y)\, d(x,y)$

$$F = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \operatorname{div} \mathbf{f}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} 3\, dx\right] dy = 48\,.$$

$$3x \Big|_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2}$$

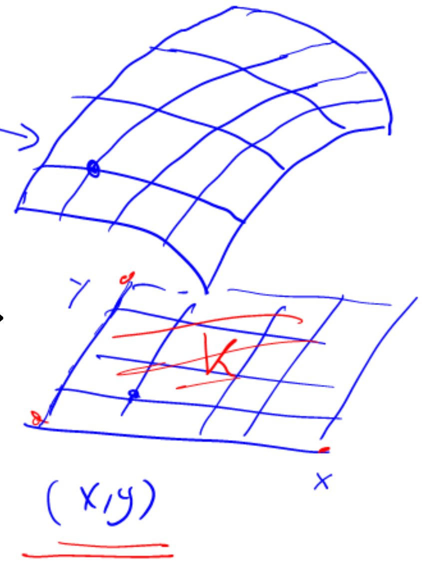
$$= \int_{-2}^{2} 3\left[4 - y^2 - \frac{y^2}{2} + 2\right] dy = 3\left[6y - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= 3\left[\underbrace{12 - \frac{8}{2}}_{8} - \left(\underbrace{-12 + \frac{8}{2}}_{-8}\right)\right] = 3 \cdot 16 = 48$$

Oberflächenintegrale

F = **Fläche im** $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = p(x,y)$$



$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(u,v)\,;\, (u,v)^T \in K \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

K : kompakt, $\partial p/\partial u$, $\partial p/\partial v$ linear unabhängig

Beispiel:

Kugel mit Radius 2 um Null: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

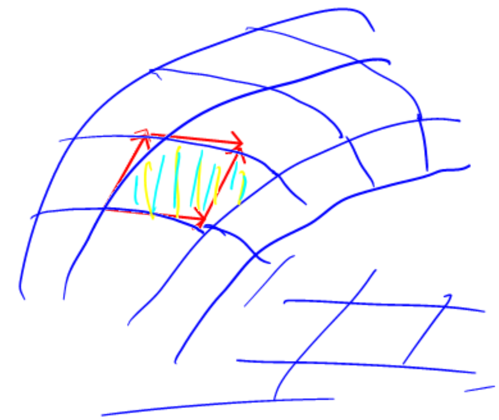
In Kugelkoordinaten:

Kugel: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ r \in [0,2]$$

Kugeloberfläche: F : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Parameterbereich: K : $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Flächeninhalt einer Fläche F im $\mathbb{R}^3$:



Näherung: Summe von Flächen von Parallelogrammen

Fläche Parallelogramm mit Seiten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$

Immer feinere Näherung: Summe $---->$ Integral

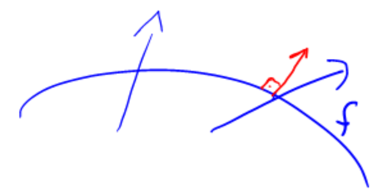
$$\text{Flächeninhalt} = \int_K 1 \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v) =: \int_{p(K)} 1 \cdot dO := \int_F 1 \cdot dO$$

$$dO := \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

Oberflächenintegral 1. Art: $f :\longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$I_1 = \int_F f dO := \int_{p(K)} f \cdot dO = \boxed{\int_K f(p(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)}$$

Beispiel: Masse$= \int_F$ Dichte dO



Oberflächenintegral 2. Art: $\boldsymbol{f} :\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$I_2 = \int_F \boldsymbol{f} dO := \int_{p(K)} \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)), \boldsymbol{n} > \cdot \cancel{\left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\|} d(u,v)$$

$$n = \frac{\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}}{\cancel{\left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\|}}$$

$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)) \, , \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > \; d(u,v)$$

Beispiel: $\boldsymbol{f}$ = Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung $\Longrightarrow$

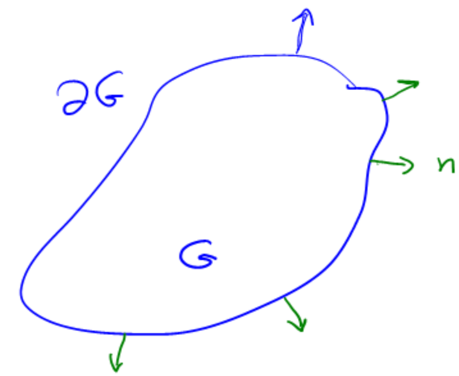
I_2 = Fluidmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche hindurch fließt

Integralsatz von Gauß

Sei G kompakt, meßbar, Standardbereich im $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\int_G \operatorname{div}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Bereichsintegral im } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\int_{\partial G} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \underbrace{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}_{\text{äußere Normale}} > dO}_{\text{Oberflächenintegral 2. Art}}$$

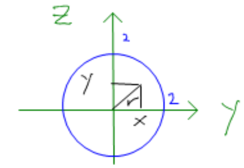
Rand G



$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)), \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > d(u,v)$$

bei richtiger Reihenfolge im Kreuzprodukt

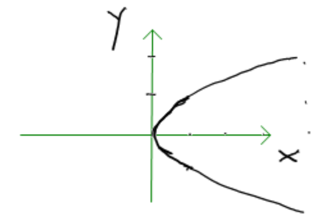
Beispiel 1: Gegeben seien das Flächenstück



bei $z=0$
$x=y^2$

Kreis in y-z-Ebene

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; y^2 + z^2 \le 4 \, , \; x = y^2 + z^2 \right\}$$



$y = r\cos(\varphi)$

$z = r\sin(\varphi)$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$r^2 = y^2 + z^2$ $\qquad 0 \le r \le 2$

$x = y^2 + z^2 = r^2$

und das Vektorfeld

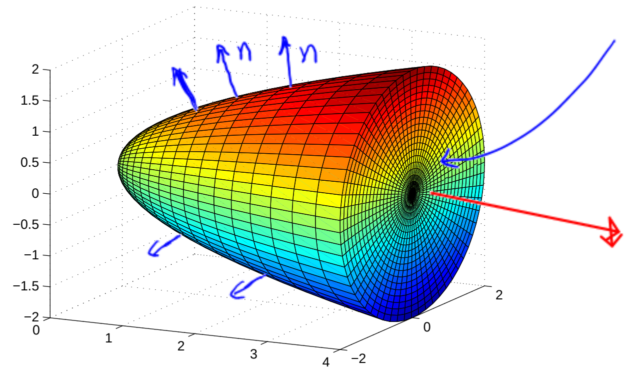
$$p(r,\varphi) = \begin{array}{l} x \rightarrow \\ y \rightarrow \\ z \nearrow \end{array} \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\, do$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluss von f durch die Oberfläche des Körpers

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; y^2 + z^2 \le 4 \, , \; y^2 + z^2 \le x \le 4 \right\} ?$$



c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösung: $y^2 + z^2 \le 4\,,\; x = y^2 + z^2$

a) $p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ Parametrisierung der gewölbten Fläche: siehe oben

$$\partial p \,/\, \partial \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial r = \begin{pmatrix} 2r \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r\sin^2(\varphi) - r\cos^2(\varphi) \\ 2r^2\cos(\varphi) - 0 \\ 0 - (-2r^2\sin(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\,\overbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2(\varphi))}^{1} \\ 2r^2\cos(\varphi) \\ 2r^2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 2r^2\cos(\phi) \\ 2r^2\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Auf der Fläche

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \qquad p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

Also
$x + 2(y^2 + z^2)$
$= r^2 + 2r^2$

Das für x, y, z in f einsetzen

$$f(p(r,\phi)) = \begin{pmatrix} 3r^2 \\ r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \\ r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)) \end{pmatrix}$$

$$< f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > = -r(3r^2) + (2r^2\cos(\phi)) \cdot (r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)))$$

$$+ (2r^2\sin(\phi)) \cdot (r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)))$$

$$= -3r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(\underbrace{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}_{1} - \underbrace{2\cos(\phi)\sin(\phi)}_{\sin(2\varphi)})$$

ausmultipliziert und nach r-Potenzen sortiert

Ergebnis von oben einsetzen

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} < f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > d\phi dr =$$

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} -r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(-\sin(2\phi))\, d\phi \right] dr = -8\pi$$

$$= \int_0^2 -r^3\varphi\Big|_0^{2\pi} + 2r^4\Big(\underbrace{\sin(\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \underbrace{\cos(\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0}\Big) + r^3 \underbrace{\cos(2\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0} \; dr$$

$$= \int_0^2 -r^3 \cdot 2\pi \, dr = -\pi \frac{r^4}{2} \Big|_0^2 = -\pi\left[\frac{2^4}{2} - \frac{0^4}{2}\right] = -8\pi$$

b) Fluss durch $P:\ y^2+z^2 \le 4\,,\ \underline{y^2+z^2 \le x} \le 4$

$$y = r\cos(\phi)\,,\quad z = r\sin(\phi) \qquad \text{mit} \qquad \phi \in [0,2\pi],\quad r \in [0,2]\,.$$

$x = x$ mit $\underbrace{y^2+z^2}_{r^2} \le x \le 4$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{div}\,(\boldsymbol{f}(x,y,z)) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

Zylinderkoordinaten!

$$\int_P \text{div}\,(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{4} \underbrace{3 \cdot r}_{3rx\,\big|_{r^2}^{4}}\,dx\,d\phi\,dr$$

X

$$= 6\pi \int_0^2 r(4 - r^2)\,dr = 24\pi.$$

Schreibfehler im Video

c) Der Rand von P setzt sich zusammen aus zwei Flächenstücken, nämlich die Fläche aus Teil a) und das Flächenstück F_2 mit

$$x = 4\,, \quad y = r\cos(\phi)\,, \quad z = r\sin(\phi) \text{ und } \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]\,.$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$ Kreis parallel zur y-z-Ebene mit $x=4$

Nach Gauß gilt:

$$\text{Gesamtfluss} = \text{Fluss durch F} + \text{Fluss durch } F_2 = \int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Der Fluss durch F_2 ergibt wie folgt:

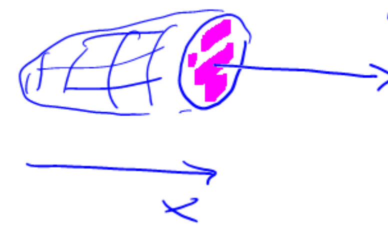
$$\partial p_2/\partial\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \partial p_2/\partial r = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

Falsche Richtung

$$-\frac{\partial p_2}{\partial\phi} \times \frac{\partial p_2}{\partial r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_1(x,y,z) = \underbrace{x + 2y^2 + 2z^2}_{4 + 2r^2}$$



$$< f(p_2(r,\phi)), \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 4+2r^2 \\ \text{egal !} \\ \text{egal !} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = 4r + 2r^3$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Also $x = 4$

$2(y^2+z^2) = 2r^2$

$x + 2y^2 + 2z^2 = 4 + 2r^2$

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} 4r + 2r^3 d\phi\right] dr = 2\pi \left[2r^2 + \frac{r^4}{2}\right]_0^2 = 32\pi$$

$$\underbrace{(4r+2r^3)\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{2\pi(4r+2r^3)}$$

Damit erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche wie (nach Teil a)) erwartet

$$24\pi - 32\pi = -8\pi.$$

Gesamtfluss   Fluss durch F_2 (ebene Wand)

Beispiel 2: (vermutlich nur zum selber Nachrechnen1)

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \;\le\; R^2, z \;\le H \right\}$$

wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \le H \le R$ seien.

b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \;\le\; \phi \;\; \le 2\pi,\; 4 \le r \le 8 \right\} .$$

Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Lösung:

a) Parametrisierung: angepasste Kugelkoordinaten

$$x = R\cos(\phi)\cos(\theta)\,, \quad y = R\sin(\phi)\cos(\theta)\,, \quad z = R\sin(\theta)$$

mit $\qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \arcsin(H/R)]\,.$

$$\partial p\,/\,\partial\phi \;=\; \begin{pmatrix} -R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \partial p\,/\,\partial\theta \;=\; \begin{pmatrix} -R\cos(\phi)\sin(\theta) \\ -R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

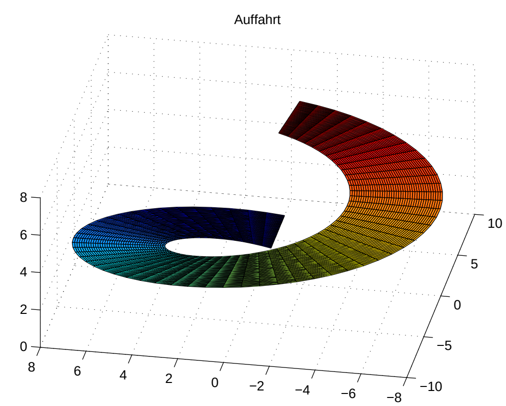
$$\partial p\,/\,\partial\phi \;\times\; \partial p\,/\,\partial\theta \;=\; R^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\|\partial p\,/\,\partial\phi \;\times\; \partial p\,/\,\partial\theta\,\| \;=\; R^2\cos(\theta)$$

Die Oberfläche ergibt sich aus der Fläche des Deckels (Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - H^2}$) und dem darunterliegenden Teil der Oberfläche der Kugel:

$$
\begin{aligned}
F &= \pi(R^2 - H^2) \, + \, R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \cos(\theta) \, d\theta d\phi \\
&= \pi(R^2 - H^2) \, + \, 2\pi R^2 \, \sin(\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \, = \\
&= \pi(R^2 - H^2) \, + \, 2\pi R^2 (1 + H/R) \, = \, 3\pi R^2 + 2\pi R H - \pi H^2
\end{aligned}
$$

b) $x = r\cos(\phi)\,, \quad y = r\sin(\phi)\,, \quad z = \phi$



mit $\qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [4, 8]\,.$

$$\partial p \,/\, \partial \phi \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial r \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial p \,/\, \partial \phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial r \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ -r \end{pmatrix} \qquad \|\partial p \,/\, \partial \phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial r\,\| \;=\; \sqrt{1+r^2}$$

$$F = \int_0^{2\pi} \int_4^8 \sqrt{1+r^2} dr d\phi = \pi \left[r\sqrt{1+r^2} \;+\; \ln(r + \sqrt{1+r^2}) \right]_4^8$$

(Formelsammlung oder Mathe II nachschlagen!)