Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 21/22

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 7 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Sätze von Green und Gauß

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} \, : \, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stkw. C^1)

$\mathbf{c}(a) =$ Anfangspunkt, $\mathbf{c}(b) =$ Endpunkt.

Kurvenintegral über skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{s} \, := \, \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral über Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} > \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.

Potentiale

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld,

$\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt **Potential** von $\boldsymbol{f}$, wenn $\forall \boldsymbol{x} \in D$:

$$\boxed{\nabla \cdot \phi(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} \phi(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

Im $\mathbb{R}^3$ heißt das

$$\phi_x = f_1, \quad \phi_y = f_2, \quad \phi_z = f_3$$

Zur Erinnerung: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \forall\, C^2$ Funktionen ϕ

Es kann also nur dann ein Potential geben, wenn $\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0}$ gilt.

Rotation des Vektorfeldes bei n=3

$$\textbf{rot}\quad \boldsymbol{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \textbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Rotation des Vektorfeldes bei n=2: **rot** $\boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y$

$$\boxed{\text{rot}\, \boldsymbol{f} \neq 0 \implies \text{Es gibt kein Potential}}$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\boxed{D \text{ einfach zusammenhängend: } J\boldsymbol{f} \text{ symmetrisch} \iff \exists \text{ Potential}}$$

Konstruktion von ϕ

Beispiel 1) $$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - e^x z \\ 2x^3y + \sin z \\ y\cos z - e^x \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Falls	$\phi_x = 3x^2y^2 - e^x z$
dann	$\phi(x, y, z) =$
und	$\phi_y =$
andererseits	$\phi_y \stackrel{!}{=} f_2 = 2x^3y + \sin z$
$\Longrightarrow$	$C_y(y, z) \stackrel{!}{=}$
also	$\phi(x, y, z) = x^3y^2 - e^x z + y\sin z + \tilde{C}(z)$

und	$\phi_z = y\cos z - e^x \, + \, \tilde{C}'(z)$
andererseits	$\phi_z \stackrel{!}{=} \, f_3 = y\cos z - e^x$
$\Longrightarrow$	$\tilde{C}'(z) \stackrel{!}{=} \, 0 \Longrightarrow \tilde{C}(z) = k$
also	$\phi(x,y,z) \, = \, x^3y^2 - e^x z \, + \, y\sin z + k \qquad k \in \mathbb{R}$

Beispiel 2) $\quad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + \dfrac{3x^2}{1+x^3} \cdot \cos(y) \\ \\ x^2 + \ln(1+x^3) \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \\ \phi_y \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0$

Das sieht kompliziert aus! Lohnt sich der Versuch des Integrierens?

$$\begin{aligned} \text{rot}\, \boldsymbol{f}(x,y) &= (f_2)_x - (f_1)_y \\ &= 2x + \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot \sin(y) \\ &- 2x - \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot (-\sin(y)) \\ &\neq 0 \qquad \forall (x,y). \end{aligned}$$

Es gibt kein Potential.

Beispiel 3) $D = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\cos(x) \\ z\sin(x) + 2y + z \\ y\sin(x) + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & z\cos(x) & y\cos(x) \\ z\cos(x) & \ldots\ldots & \\ y\cos(x) & & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stkw. C^1)

$\mathbf{c}(a) =$ Anfangspunkt, $\mathbf{c}(b) =$ Endpunkt.

Kurvenintegral über skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{s} := \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral über Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} > \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.

Hauptsatz: $$\boxed{\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \phi = (\mathsf{grad}\,\phi)^T \implies \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \;=\; \phi(c(b)) - \phi(c(a))}$$

D.h. insbesondere: Kurvenintegral ist wegunabhänging und

$$\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \;=\; 0 \quad \forall \text{ geschlossenen } \mathbf{c}$$

Satz von Green: $\boldsymbol{f}$: C^1 Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^2$: Gebiet

$K \subset D$: kompakt und bzgl. beider Variablen projizierbar

$c(t)$ stkw. C^1 Parametrisierung von ∂K, positiv umlaufen, dann

$$\boxed{\oint_c \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,dx \;=\; \int_K \mathsf{rot}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,dx}$$

Für den **Fluss einer Strömung aus K heraus**:

$$\boxed{\oint_{\partial K} < \boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{n} > ds \;=\; \int_K \mathsf{div}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,dx}$$

Beispiel 1: (Wiederholungsklausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

Lösung:

$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) :=$ $\qquad\qquad$ $\dot{\mathbf{c}}(t) :=$

$$< K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > \; = < \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \cos(t) - t \cdot \sin(t) \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$= \; (\cos^2(t) - t\sin(t)\cos(t) \; + \; \sin^2(t) \; + \; t\sin(t)\cos(t) \; + t^2)$$

$$\int_1^3 \; < K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > \; dt \; = \; \int_1^3 (1 + t^2)\, dt \; = \; \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = \; 2 + 9 - \frac{1}{3} \; = \; \frac{32}{3} \, .$$

Beispiel 2: (Klausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x}.$$

Lösung:

a) $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2 \implies$

es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$.

$\phi(x,y) = xy^2$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} \;=\; \int_0^{2\pi} \;<\; \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) \;>\; dt = \int_0^{2\pi} \; t^2(\cos t - \sin t)\, dt$$

$$= \; t^2(\cos t + \sin t)\, \Big|_0^{2\pi} \; - \; \int_0^{2\pi} \; 2t(\cos t + \sin t)\, dt$$

$$= \; 4\pi^2 - \; [\, 2t(\sin t - \cos t)]_0^{2\pi} \; + \; \int_0^{2\pi} \; 2(\sin t - \cos t) dt = 4\pi^2 + 4\pi \,.$$

Für $\boldsymbol{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ gilt mit dem Potential $\phi(x, y) \; = \; xy^2$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} \;=\; \int_0^{2\pi} \;<\; \boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) \;>\; dt$$

$$= \phi(\cos(2\pi), 2\pi) \; - \; \phi(\cos(0), 0) \; = \; 4\pi^2 \,.$$

Beispiel 3: Green (Klausure 07, Stuckmeier/Kiani)
Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\, d(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \dfrac{y^3}{3} \\ \dfrac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

Lösung:

Da f selbst nicht sehr integrierfreundlich aussieht, dafür aber

$$\text{rot } f(x,y) = x^2 + y^2$$

verwendet man den Satz von Green und erhält

$$I := \int_{\partial D} f(x,y)ds \; = \; \int_D x^2 + y^2 \, d(x,y)$$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\phi \, dr \; = 2\pi \; \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 = 8\pi.$$

Beispiel 4: Gauß/Fluss (Klausur 06/07, Stuckmeier/Kiani) Gegeben seien die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$$

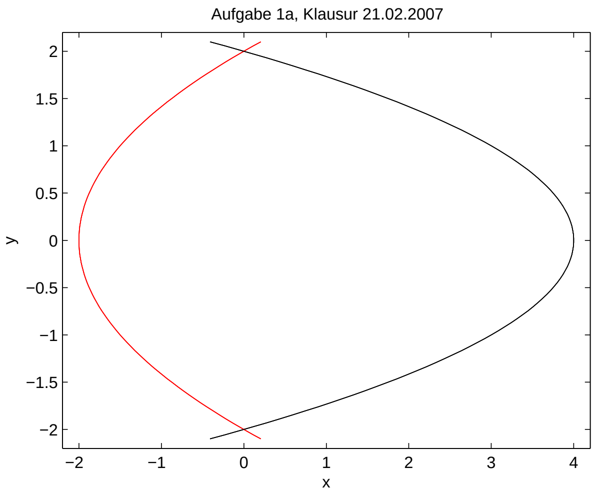
und das das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y} \cos y \\ 2y + e^{-x} \sin x \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{f}$ durch den Rand der Menge D.

Wie man der Skizze entnimmt gilt (vgl. Hausaufgabe 1, Blatt 6)

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \le y \le 2, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$$



Der Fluss F ergibt sich nach dem Satz von Green/Gauß in der Ebene:

$$F = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \text{div } \mathbf{f}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} 3\, dx\, dy = 48\,.$$

Oberflächenintegrale

F = **Fläche im** $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(u,v)\,;\,(u,v)^T \in K \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

K : kompakt, $\partial p/\partial u$, $\partial p/\partial v$ linear unabhängig

Beispiel:

Kugel mit Radius 2 um Null: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

In Kugelkoordinaten:

Kugel: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 2]$

Kugeloberfläche: F : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(\phi\,,\,,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Parameterbereich: K : $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Flächeninhalt einer Fläche F im $\mathbb{R}^3$:

Näherung: Summe von Flächen von Parallelogrammen

Fläche Parallelogramm mit Seiten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$

Immer feinere Näherung: Summe $---\!>$ Integral

Flächeninhalt $= \displaystyle\int_K 1 \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v) =: \int_{p(K)} 1 \cdot dO \;:=\; \int_F dO$

$$dO \;:=\; \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

Oberflächenintegral 1. Art: $f :\longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$I_1 \; = \int_F f dO \; := \int_{p(K)} f \cdot dO \; = \int_K f(p(u,v)) \; \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

Beispiel: Masse$= \displaystyle\int_F$ Dichte dO

Oberflächenintegral 2. Art: $\boldsymbol{f} :\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$I_2 = \int_F \boldsymbol{f} dO \; := \int_{p(K)} \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)), \boldsymbol{n} > \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)) \, , \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > \; d(u,v)$$

Beispiel: $\boldsymbol{f}$ = Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung $\Longrightarrow$

I_2 = Fluidmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche hindurch fließt

Integralsatz von Gauß

Sei G kompakt, meßbar, Standardbereich im $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\int_G \text{div } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Bereichsintegral im } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\int_{\partial G} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \underbrace{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}_{\text{äußere Normale}} \quad > dO}_{\text{Oberflächenintegral 2. Art}}$$

$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v))\,, \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > \; d(u,v)$$

bei richtiger Reihenfolge im Kreuzprodukt

Beispiel 1: Gegeben seien das Flächenstück

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\leq\, 4\,,\, x = y^2 + z^2 \right\}$$

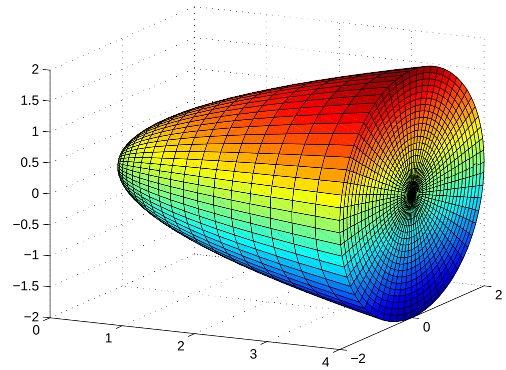
und das Vektorfeld

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\,do$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluss von f durch die Oberfläche des Körpers

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\leq\, 4\,,\, y^2 + z^2 \,\leq\, x \,\leq\, 4 \right\} ?$$



c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösung: $y^2 + z^2 \le 4\,,\; x = y^2 + z^2$

a) $p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$

$$\partial p \,/\, \partial\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial r = \begin{pmatrix} 2r \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 2r^2\cos(\phi) \\ 2r^2\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \qquad p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$f(p(r,\phi)) = \begin{pmatrix} 3r^2 \\ r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \\ r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} < f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} >= & -r(3r^2) + (2r^2\cos(\phi)) \cdot (r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi))) \\ & + (2r^2\sin(\phi)) \cdot (r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi))) \\ & = -3r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) - 2\cos(\phi)\sin(\phi)) \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} < f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > d\phi dr =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} -r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(-\sin(2\phi))\, d\phi dr = -8\pi$$

b) Fluss durch $P: \; y^2 + z^2 \;\leq\; 4\,,\; y^2 + z^2 \;\leq\; x \;\leq\; 4$

$$y = r\cos(\phi)\,, \quad z = r\sin(\phi) \qquad \text{mit} \qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]\,.$$

$x = x$ mit $\leq x \leq$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \;+\; 2y^2 \;+\; 2z^2 \\ y \;+\; x \;-\; z \\ z \;+\; x \;-\; y \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{div}\;(\boldsymbol{f}(x, y, z) =$$

Zylinderkoordinaten!

$$\int_P \text{div}\,(x, y, z)\,d(x, y, z) \;=\; \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int \qquad dx\,d\phi\,dr$$

$$=\; 6\pi \int_0^2 r(4 - r^2)\,dr \;=\; 24\pi.$$

c) Der Rand von P setzt sich zusammen aus zwei Flächenstücken, nämlich die Fläche aus Teil a) und das Flächenstück F_2 mit

$x = 4\,, \quad y = r\cos(\phi)\,, \quad z = r\sin(\phi)$ und $\qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]\,.$

Nach Gauß gilt:

Gesamtfluss = Fluss durch F + Fluss durch $F_2 \; = \displaystyle\int_K \text{div}\,(x, y, z)\, d(x, y, z)$

Der Fluss durch F_2 ergibt wie folgt:

$$\partial p \,/\, \partial\phi \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial r \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial\phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} \;=\; \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_1(x, y, z) = x \;+\; 2y^2 \;+\; 2z^2$$

$$<\; f(p(r, \phi)), \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;>=<\; \begin{pmatrix} 4 + 2r^2 \\ \text{egal !} \\ \text{egal !} \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;>= 4r + 2r^3$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 4r + 2r^3 d\phi\, dr = 2\pi \left[2r^2 + \frac{r^4}{2}\right]_0^2 = 32\pi$$

Damit erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche wie (nach Teil a)) erwartet

$24\pi \, - \, 32\pi \, = \, -8\pi.$

Beispiel 2: (vermutlich nur zum selber Nachrechnen1)

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \, \leq \, R^2, z \, \leq H \right\}$$

wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \leq H \leq R$ seien.

b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : 0 \, \leq \, \phi \, \leq 2\pi, \, 4 \leq r \leq 8 \right\} .$$

Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Lösung:

a) Parametrisierung: angepasste Kugelkoordinaten

$$x = R\cos(\phi)\cos(\theta)\,, \quad y = R\sin(\phi)\cos(\theta)\,, \quad z = R\sin(\theta)$$

mit $\quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \arcsin(H/R)]\,.$

$$\partial p \,/\, \partial\phi \;=\; \begin{pmatrix} -R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial\theta \;=\; \begin{pmatrix} -R\cos(\phi)\sin(\theta) \\ -R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\partial p \,/\, \partial\phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial\theta \;=\; R^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\|\partial p \,/\, \partial\phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial\theta\,\| \;=\; R^2\cos(\theta)$$

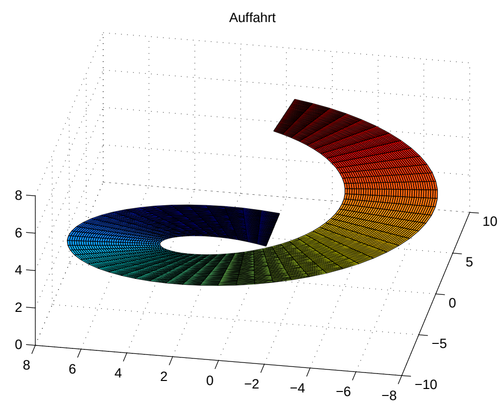
Die Oberfläche ergibt sich aus der Fläche des Deckels (Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - H^2}$) und dem darunterliegenden Teil der Oberfläche der Kugel:

$$F = \pi(R^2 - H^2) \; + \; R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \cos(\theta)\, d\theta d\phi$$

$$= \pi(R^2 - H^2) \; + \; 2\pi R^2 \; \sin(\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \; =$$

$$= \pi(R^2 - H^2) \; + \; 2\pi R^2(1 + H/R) \; = \; 3\pi R^2 + 2\pi RH - \pi H^2$$

b) $x = r\cos(\phi)\,, \quad y = r\sin(\phi)\,, \quad z = \phi$



mit $\qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [4, 8]\,.$

$$\partial p \,/\, \partial \phi \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \partial p \,/\, \partial r \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial p \,/\, \partial \phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial r \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ -r \end{pmatrix} \qquad \|\partial p \,/\, \partial \phi \;\times\; \partial p \,/\, \partial r\,\| \;=\; \sqrt{1+r^2}$$

$$F = \int_0^{2\pi} \int_4^8 \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\phi = \pi \left[r\sqrt{1+r^2} \;+\; \ln(r + \sqrt{1+r^2}) \right]_4^8$$

(Formelsammlung oder Mathe II nachschlagen!)