

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

Bereichsintegrale, Transformationssatz,

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Frohes neues Jahr!

Volumen, Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

$D \subset \mathbb{R}^2$ bzw \mathbb{R}^3 kompakt, meßbar, $\rho(\mathbf{x})$ Massendichte

Volumen (Flächeninhalt): $V = \int_D 1 d\mathbf{x}$

Masse: $M = \int_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \frac{\int_D \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}}{\int_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$ (komponentenweise)

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{\int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)}{M}$$

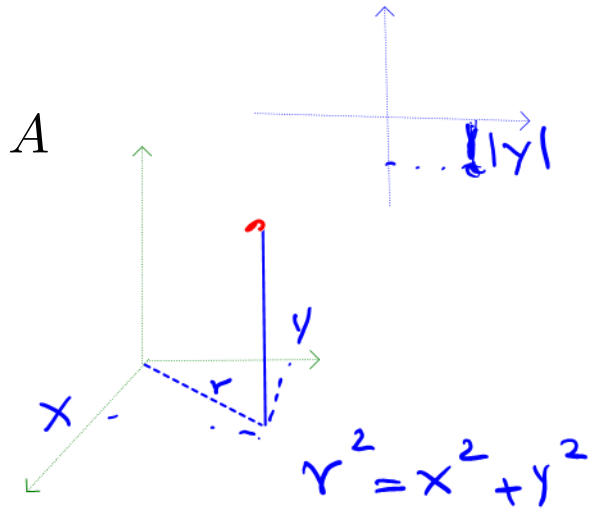
Trägheitsmoment:

$$\Theta_A = \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad r(\mathbf{x}) = \text{Abstand zur Achse } A$$

Beispiele für Abstände:

Abstand zur z -Achse im \mathbb{R}^3 : $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Abstand zur x -Achse im \mathbb{R}^2 : $\sqrt{y^2} = |y|$.



Steinerscher Satz: Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

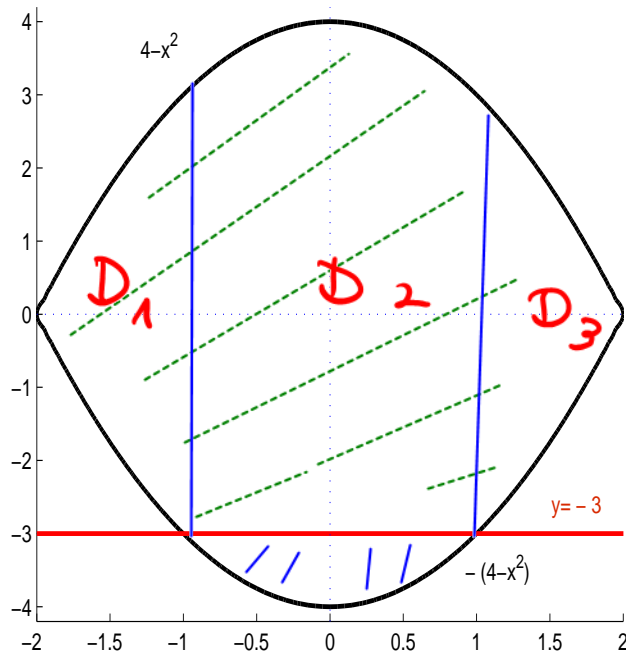
Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt x_s des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes x_s von der Achse A .

Beispiel 1: Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underline{-2 \leq x \leq 2}, \underline{y^2 \leq (4 - x^2)^2}, \underline{y \geq -3} \right\}.$$

$$|y| \leq \underline{|4 - x^2|}$$

$$-4 + x^2 \leq y \leq 4 - x^2$$



Schreiben Sie D als Vereinigung von Normalbereichen.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte $\rho = 3$.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 : -2 \leq x \leq -1, \quad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$D_2 : -1 \leq x \leq 1, \quad -3 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$D_3 : 1 \leq x \leq 2, \quad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

Fläche: $F = \int_{-2}^2 \left[\int_{x^2-4}^{4-x^2} 1 \, dy \right] dx - \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2-4}^{-3} 1 \, dy \right] dx$

$$y \mid \begin{array}{l} 4-x^2 \\ x^2-4 \end{array}$$

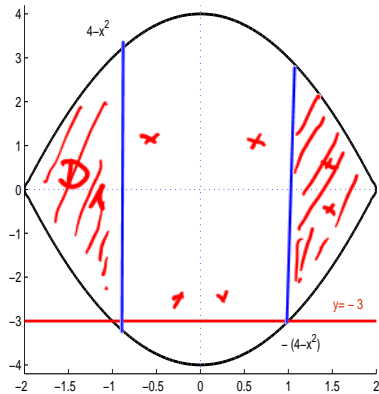
$$4-x^2 - (x^2-4)$$

$$y \mid \begin{array}{l} -3 \\ x^2-4 \end{array}$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 \underline{2 \cdot (4 - x^2)} \, dx - 2 \int_0^1 \underline{-3 - (x^2 - 4)} \, dx$$

$$= 4 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 \cdot \left(\frac{16}{3} \right) - 2 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{Masse : } M = \int_D \rho d(x, y) = 3 \int_D 1 d(x, y) = 3 \times \text{Fläche} = 3F$$



$$x_s = \frac{1}{M} \int_D x \cdot \rho(x, y) d(x, y) = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_D y \cdot \rho(x, y) d(x, y), \quad \text{wobei } \int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3}$$

$$\text{Es gilt } \int_{D_1} y \cdot \rho(x, y) = \int_{D_3} y \cdot \rho(x, y) = 0 \text{ (Symmetrie).}$$

Also erhält man

$$y_s = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 \int_{-3}^{4-x^2} \rho \cdot y \, dy \, dx \quad \left(= \frac{2}{M} \int_0^1 \int_{-3}^{4-x^2} \rho \cdot y \, dy \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\rho \cdot F}} \int_{-1}^1 \int_{-3}^{4-x^2} \cancel{\rho} \cdot y \, dy \, dx = \frac{1}{\cancel{F}} \int_{-1}^1 \left[\int_{-3}^{4-x^2} \underline{1 \cdot y} \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{20}} \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{-3}^{4-x^2} dx = \frac{1}{40} \int_{-1}^1 (4-x^2)^2 - 3^2 dx$$

$$= \frac{1}{40} \int_{-1}^1 ((16 - 8x^2 + x^4 - 9)) dx$$

$$= \frac{1}{40} \left(\left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 7x \right]_{-1}^1 \right)$$

$$\vec{X}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{68}{300} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + \frac{35}{5} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{8}{3} - \frac{35}{5} \right) \right) = \frac{68}{300}$$

Beispiel 2: Berechnen Sie das Integral von $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ über den

halben Kreisring $R : \underline{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9}, \quad \underline{x \leq 0}.$

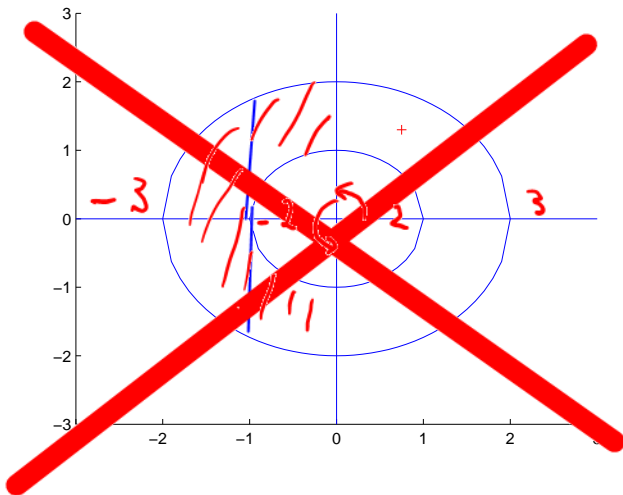
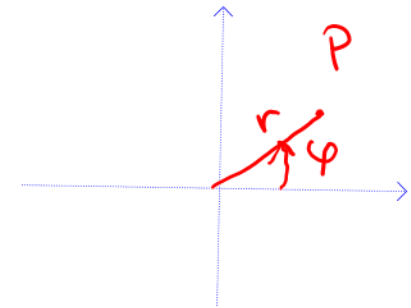
Berechnung in kartesischen Koordinaten umständlich!

In Polarkoordinaten $\underline{x = r \cos(\phi)}, \quad \underline{y = r \sin(\phi)}$ gilt:

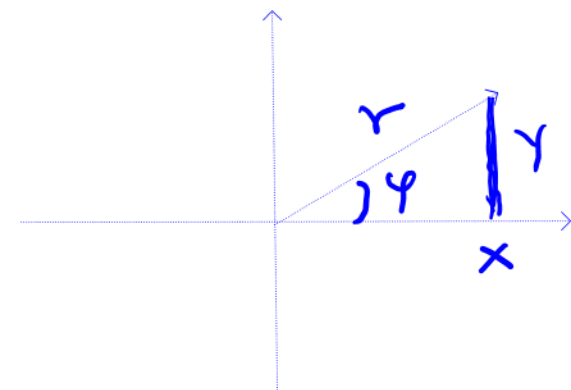
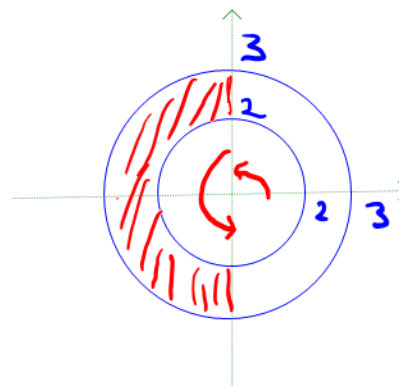
$R :$

Das Gebiet ist viel einfacher.

ABER: Koordinatenwechsel / Substitution nötig!



$$r \in [2, 3]$$
$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$



Transformationssatz:

Zur Erinnerung: im \mathbb{R}^1 gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \underbrace{\phi'(u)}_{dx} du$$

$$\frac{dx}{du} = \phi'(u)$$
$$dx = \phi'(u) du$$

$$(\phi'(u) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[)$$

Unter den in der Vorlesung angegebenen Voraussetzungen an Φ und D und f gilt hier:

$$\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) \cdot |\det J\Phi(\mathbf{u})| du \quad (|\det J\Phi(\mathbf{u})| \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D^\circ)$$

Polarkoordinaten

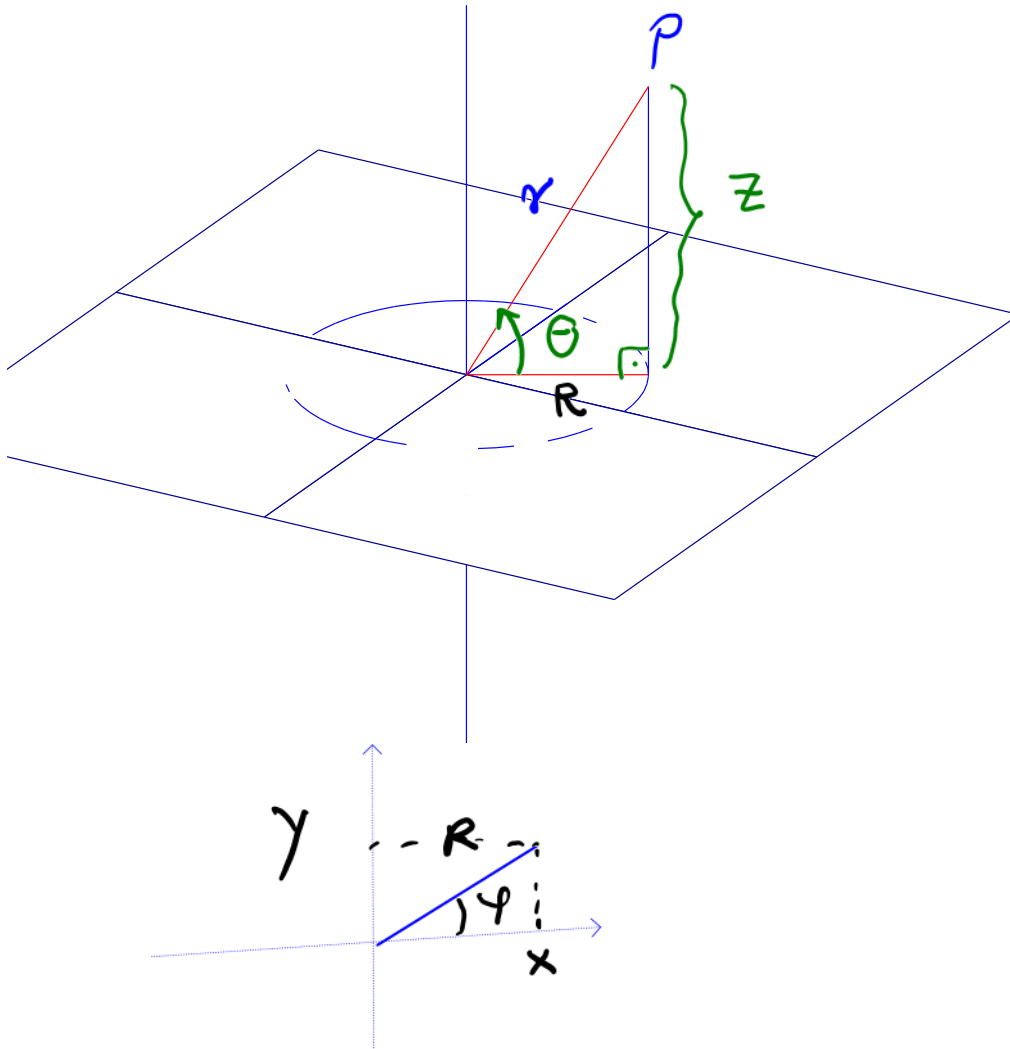
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|\det(J\Phi(r, \varphi))| = r$$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\det J\Phi = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi)$$
$$= r (\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_1)$$
$$= r$$

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \Bigg\|$

$|\det(J\Phi(r, \varphi))| = r^2 \cos(\theta).$



$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$z = r \sin(\theta)$

$R = \cos(\theta) \cdot r \leftarrow$

$x = R \cos(\varphi) = r \cos(\theta) \cos(\varphi)$

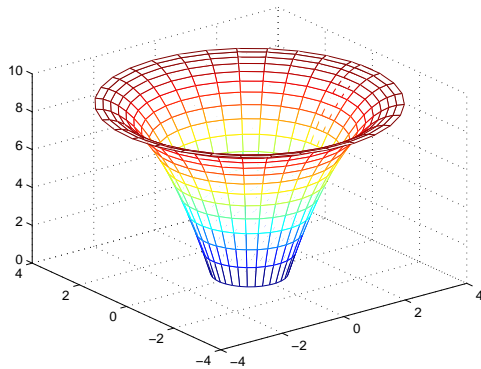
$y = R \sin(\varphi) = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\det(J\Phi(r, \varphi))| = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Im Beispiel 3: $1 \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} \leq 16, 0 \leq z \leq 9 - \underbrace{(4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2}_{r^2}$



$$1 \leq r \leq 4$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 9 - (4 - r)^2$$

Elliptische Kugelkoordinaten

$$u = \frac{x}{a} \quad x = a \cdot u$$

Zum Beispiel bei $\Phi(D) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ br \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ cr \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow u &= r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ v &= r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ w &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$|\det(J\Phi(r, \varphi))| = \underline{abc r^2 \cos(\theta)}$$

Im Beispiel 6: Rotationsellipsoid

$$E = \{(x, y, z)^T : \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} \leq 1\}.$$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 2 r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det(J(\Phi)) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot r^2 \cos(\theta)$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Elliptische Zylinderkoordinaten: analog

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \cos(\varphi) \\ br \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\det(J\Phi(r, \varphi))| = \begin{vmatrix} a \cos(\varphi) & -ra \sin(\varphi) & 0 \\ b \sin(\varphi) & rb \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr$$

Beispiel 5:

Gegeben ist ein Turm mit elliptischem Grundriss:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : , \underbrace{0 \leq \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 25}_{0 \leq r \leq 5}, \quad 0 \leq z \leq 20 \right\}.$$

$$x = 4r \cos(\varphi)$$

$$y = 3r \sin(\varphi)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

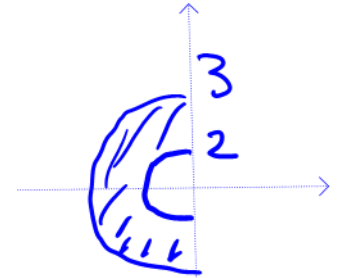
Im Beispiel 2 war $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ zu integrieren über den halben Kreisring

$$R: 4 \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} \leq 9, \quad x \leq 0$$

$$r \in [2, 3] \quad \phi \in \left[+\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$



$$\begin{aligned} \int_R f(x, y) d(x, y) &= \int_R \frac{1}{x^2 + y^2} d(x, y) = \int_2^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{r^2} \cdot r \cdot d\phi dr \\ &= \int_2^3 \frac{1}{r} \left[\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dr \\ &= \pi \int_2^3 \frac{1}{r} dr = \pi(\ln(3) - \ln(2)). \end{aligned}$$

\uparrow
 $\det(J_{\Phi})$

Beispiel 3: Es sei $f(x, y) = z \cdot (x + y)^2$ zu integrieren über

$$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 9 - (4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$1 \leq r \leq 4$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 9 - (4 - r)^2$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$\int_D z \cdot (x + y)^2 d(x, y, z) = \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} \int_0^{2\pi} z (\underbrace{r \cos(\phi)}_x + \underbrace{r \sin(\phi)}_y)^2 \cdot \underbrace{r}_{\uparrow \det J\Phi} d\phi dz dr$$

$$= \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} \int_0^{2\pi} z (r^2 \cos^2(\phi) + 2r^2 \cos(\phi) \sin(\phi) + r^2 \sin^2(\phi)) \cdot r \cdot d\phi dz dr$$

$$r^2 (\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{\textcircled{1}}) + r^2 \cdot \underline{\sin(2\varphi)}$$

$$= \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} \int_0^{2\pi} z r^3 (1 + \sin(2\varphi)) d\varphi dz dr = \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} z r^3 \left[\varphi + \frac{\cos(2\varphi)}{-2} \right]_0^{2\pi} dz dr$$

$$= \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} z r^3 \left[2\pi - 0 - \frac{1}{2} (\cos(4\pi) - \cos(0)) \right] dz dr = \pi \int_1^4 \int_0^{9 - (4 - r)^2} r^3 \underbrace{z dz}_{\rightarrow z^2} dr$$

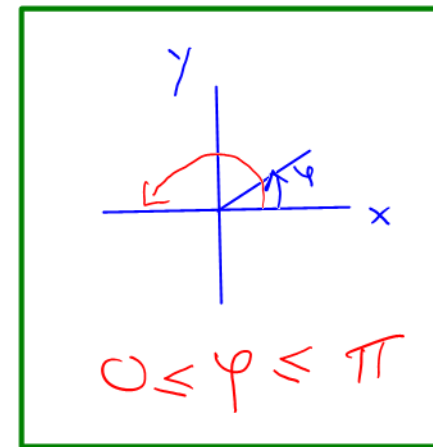
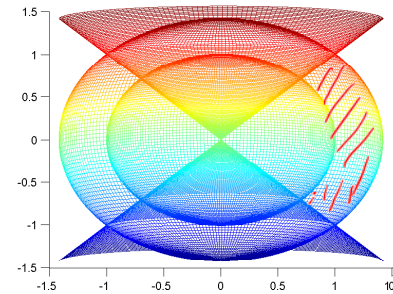
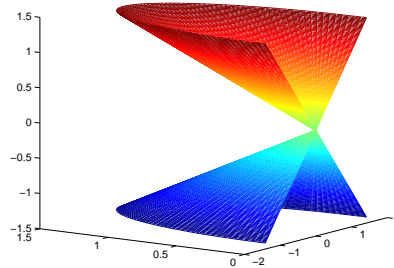
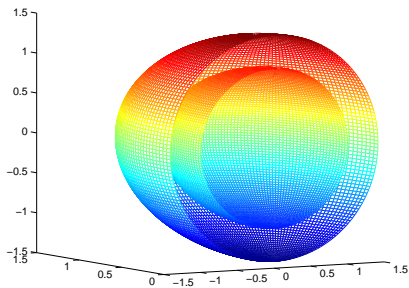
$$= \pi \int_1^4 r^3 \left[z^2 \right]_0^{9 - (4 - r)^2} dr = \pi \int_1^4 r^3 (9 - (4 - r)^2)^2 dr$$

= ...

Beispiel 4:

Berechnen Sie für den wie folgt beschriebenen Teil D einer Kugelschale mit homogener Massendichte $\rho = 2$:

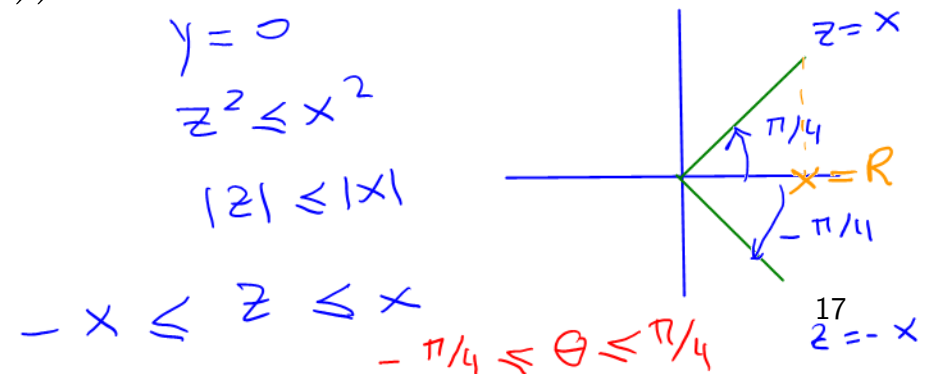
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} \leq 2, \boxed{y \geq 0}, \underbrace{z^2 \leq x^2 + y^2}_{|z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$



Trägheitsmoment bzgl. der z -Achse und bzgl. der zur z -Achse parallelen Achse A durch den Punkt $(3, 4, 0)^T$.

Hinweis: $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(x) + \cos(3x))$

Lösung:)



Übergang zu Kugelkoordinaten:

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 : \quad 1 \leq r \leq \sqrt{2}$$

$$y \geq 0 : \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$\Phi : \begin{cases} r \in [1, \sqrt{2}] & , \phi \in [0, \pi] & , \theta \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$z^2 = r^2 \sin^2(\theta) \leq x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(\phi) \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\theta)$$

Die Determinante der Transformation ist aus der Vorlesung bekannt:

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}, \det J\Phi = r^2 \cos \theta$$

$a_z(x, y, z) := \text{Abstand zur } z\text{-Achse} = \sqrt{x^2 + y^2}.$

$$a_z^2 = x^2 + y^2 = r^2 \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\text{circled}} \cos^2(\theta) + r^2 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{\text{circled}} \cos^2(\theta) = r^2 \cos^2(\theta)$$

$$r^2 \cos^2(\theta) [\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1]$$

$$\Theta_z = \int_D \rho \cdot (a_z(x, y, z))^2 d(x, y, z)$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\pi} \underbrace{2r^2 \cos^2(\theta)}_{\text{circled}} \cdot \underbrace{r^2 \cos(\theta)}_{\text{circled}} \cdot 1 d\varphi d\theta dr$$

$\det J \Phi = \pi$

$$\iint 2r^4 \cos^3(\theta) \int_0^{\pi} 1 d\varphi d\theta dr$$

Alternative
Vorgehens-
weise

$$= \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(\theta) \int_0^{\pi} 2 d\varphi d\theta dr$$

$\frac{2\varphi \Big|_0^{\pi}}{2\pi}$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \left[\int \cos^3(\theta) d\theta \right] dr$$

A

$$= 2\pi \cdot A \int_1^{\sqrt{2}} r^4 dr$$

$$= \underline{\underline{\quad}}$$

Also

Alternativ ✓

$$\Theta_z = \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^4 dr \right) \cdot \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(\theta) d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} 2 d\varphi \right)$$

$$= \frac{2\pi}{5} (\sqrt{2}^5 - 1^5) \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta) \right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{5} (4\sqrt{2} - 1) \cdot \left[\frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{12} \sin(3\theta) \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{2\pi}{5} (4\sqrt{2} - 1) \cdot \left(\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{5} (4\sqrt{2} - 1) \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\pi}{5} \frac{5}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} (4\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{3} (8 - \sqrt{2})$$

Θ_z

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int r^4 \int \left[\frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta) \right] d\theta dr \\ &= 2\pi \int r^4 \left[\frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{12} \sin(3\theta) \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} dr \\ &= 2\pi \int r^4 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) \right] dr \\ &= 2\pi \int r^4 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \right) dr \\ &= \pi \sqrt{2} \left(\frac{10}{6} \right) \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \pi \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} [2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 1] \\ &= \frac{\pi}{3} [8 - \sqrt{2}] \end{aligned}$$

$$\Theta_{\mathbf{A}} = md^2 + \Theta_z$$

$$\text{Mit } d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

und

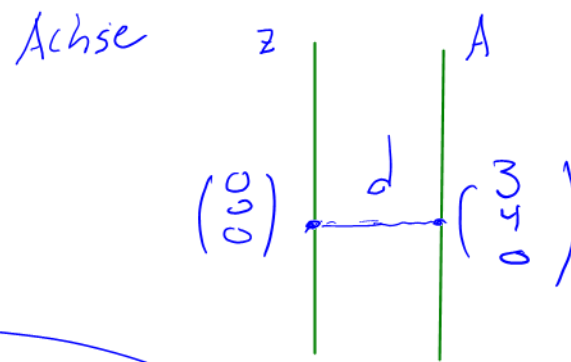
$$m = \int_D \rho d(x, y, z) = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\pi} \underbrace{1 \cdot r^2 \cos(\theta)}_{\det J \Phi} d\varphi d\theta dr$$

Volumen

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \cos(\theta) d\theta dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^2 [\sin(\theta)]_{-\pi/4}^{\pi/4} dr$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(\sqrt{2}^3 - 1) = \frac{\pi}{3}(8 - 2\sqrt{2})$$

$$\Theta_{\mathbf{A}} = md^2 + \Theta_z = \frac{\pi}{3}(8 - 2\sqrt{2}) \cdot \underset{5^2}{25} + \frac{\pi}{3}(8 - \sqrt{2})$$



Beispiel 5:

Gegeben ist ein Behälter im Form eines Turms mit elliptischem Grundriss:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : , 0 \leq \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 25, \quad 0 \leq z \leq 20 \right\}.$$

$0 \leq u^2 + v^2 = r^2 \leq 25$ $0 \leq r \leq 5$
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Die Dichte eines Stoffes im Turm wird modelliert durch $\rho(x, y, z) = \frac{1}{1 + z^2}$.

Zu berechnen: Masse des Stoffes im Turm.

Lösung: Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= u = r \cos(\varphi) \\ \frac{y}{3} &= v = r \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Elliptische Zylinderkoordinaten: $x = 4r \cos(\varphi)$, $y = 3r \sin(\varphi)$, $z = z$.

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatentransformation gilt

$$\det J = \det \begin{pmatrix} 4 \cos(\varphi) & -4r \sin(\varphi) & 0 \\ 3 \sin(\varphi) & 3r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 12r \cos^2(\varphi) - (-12r \sin^2(\varphi))$$
$$= 12r = 4 \cdot 3 \cdot r$$

Für die Parameter gilt: $r \in [0, 5]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 20]$.

Für die Masse erhält man daher

$$M = \int_0^5 \int_0^{20} \int_0^{2\pi} \rho(r, \varphi, z) \underbrace{12r}_{\text{Jct}} \underbrace{d\varphi dz dr}_{\text{J}\Phi} = \int_0^5 \int_0^{20} \frac{12r}{1+z^2} \underbrace{\varphi \Big|_0^{2\pi}}_{2\pi} dz dr$$

$$= 24\pi \int_0^{20} \int_0^5 \frac{1}{1+z^2} r dr dz = 24\pi \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^5 dz$$

$$= 25 \cdot 12\pi \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$= 300\pi \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2} dz = 300\pi \arctan(20).$$

Bei Bedarf vor Ort: Beispiel 6

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2/4 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\int_E (3z^2 - x^2 - y^2) d(x, y, z).$$

einmal unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und zum Andern unter Verwendung „elliptischer Kugelkoordinaten“.

$$x^2 + y^2 + z^2/4 \leq 1, \quad f(x, y, z) = 3z^2 - (x^2 + y^2)$$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 2r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det(J(\Phi)) =$$

Zu integrieren

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (12r^2 \sin^2(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)) (2r^2 \cos(\theta)) d\theta d\varphi dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 (13 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - \cos(\theta)) d\theta dr \end{aligned}$$

Zylinder-Koordinaten $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = z$.

$r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-2\sqrt{1-r^2}, 2\sqrt{1-r^2}]$.

$\det J(\Phi) =$

Zu integrieren

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-2\sqrt{1-r^2}}^{2\sqrt{1-r^2}} (3z^2 - r^2) r dz d\phi dr$$
$$= 4\pi \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-r^2}} (3rz^2 - r^3) dz dr$$

Ergebnis: $16\pi/3$