Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Bereichsintegrale, Transformationssatz,

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Volumen, Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

$D \subset \mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$ kompakt, meßbar, $\rho(\boldsymbol{x})$ Massendichte

Volumen (Flächeninhalt): $V = \displaystyle\int_D 1\, d\boldsymbol{x}$

Masse: $M = \displaystyle\int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \dfrac{\displaystyle\int_D \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}}{\displaystyle\int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}$ (komponentenweise)

Trägheitsmoment:

$$\Theta_A = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, r^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad r(\boldsymbol{x}) = \text{Abstand zur Achse } A$$

Beispiele für Abstände:
Abstand zur $z-$Achse im $\mathbb{R}^3$: $\sqrt{x^2+y^2}$.
Abstand zur $x-$Achse im $\mathbb{R}^2$: $\sqrt{y^2} = |y|$.

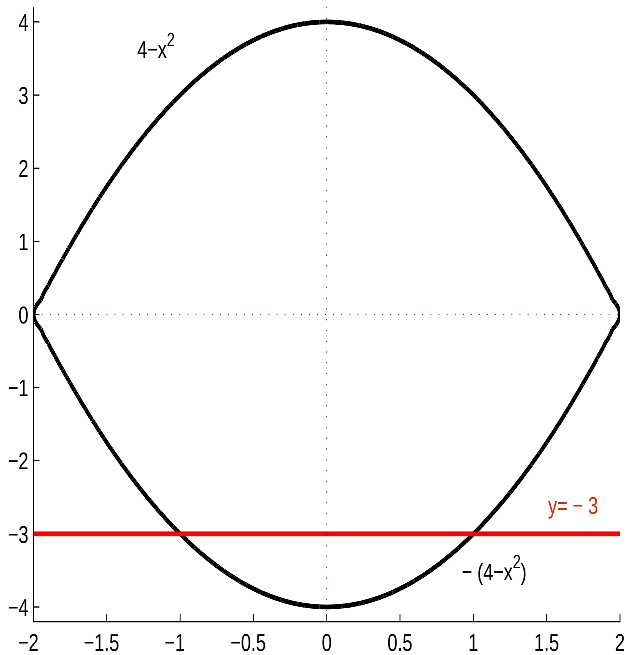
Steinerscher Satz: Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse $\boldsymbol{A}$

$$\Theta_{\boldsymbol{A}} = md^2 + \Theta_{\boldsymbol{S}}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{S}$ die zu $\boldsymbol{A}$ parallele Achse durch den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes $\boldsymbol{x}_s$ von der Achse $\boldsymbol{A}$.

Beispiel 1: Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; -2 \le x \le 2,\; y^2 \le (4-x^2)^2\,,\; y \ge -3 \right\}.$$



Schreiben Sie D als Vereinigung von Normalbereichen.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte $\rho = 3$.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 : -2 \leq x \leq -1, \qquad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

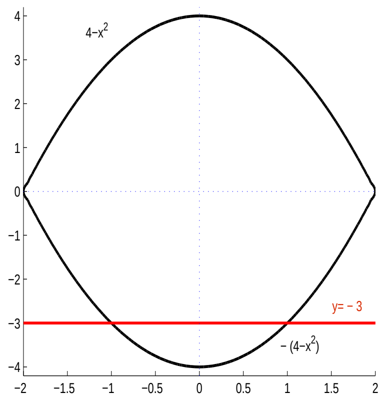
$$D_2 : -1 \leq x \leq 1, \qquad -3 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$D_3 : 1 \leq x \leq 2, \qquad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

Fläche: $F = \displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{x^2-4}^{4-x^2} 1\, dy\; dx \;-\; \int_{-1}^{1} \int_{x^2-4}^{-3} 1\, dy\; dx$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \int_0^2 2 \cdot (4 - x^2)\, dx \;-\; 2 \int_0^1 -3 - (x^2 - 4)\, dx \\
&= 4 \cdot \left[4x - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^2 - 2 \left[x - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4 \cdot \left(\frac{16}{3}\right) - 2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{60}{3} = 20.
\end{aligned}$$

Masse : $M = \int\limits_D \rho \, d(x,y) = 3 \int\limits_D 1 \, d(x,y) = 3 \times \text{Fläche} = 3\,F$



$$x_s = \frac{1}{M} \int_D x \cdot \rho(x,y) \, d(x,y) = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_D y \cdot \rho(x,y) \, d(x,y) \,, \qquad \text{wobei } \int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3}$$

Es gilt $\int_{D_1} y \cdot \rho(x,y) = \int_{D_3} y \cdot \rho(x,y) = 0$ (Symmetrie).

Also erhält man

$$
\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \rho \cdot y \, dy \, dx \; \left(= \frac{2}{M}\int_{0}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \rho \cdot y \, dy \, dx \right) \\
&= \frac{1}{\rho \cdot F}\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \rho \cdot y \, dy \, dx \; = \frac{1}{F}\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} 1 \cdot y \, dy \; dx \\
&= \frac{1}{20} \\
&= \frac{1}{40}\int_{-1}^{1} \big((16 - 8x^2 + x^4 - 9\big) \, dx \\
&= \frac{1}{40}(\left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 7x\right]_{-1}^{1}) \\
&= \frac{1}{40}(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + \frac{35}{5} - \; (-\frac{1}{5} + \frac{8}{3} - \frac{35}{5})\big) = \frac{68}{300}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Berechnen Sie das Intagral von $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ über den halben Kreisring $R:\ 4 \ \leq\ x^2+y^2\ \leq\ 9, \qquad x \leq 0.$

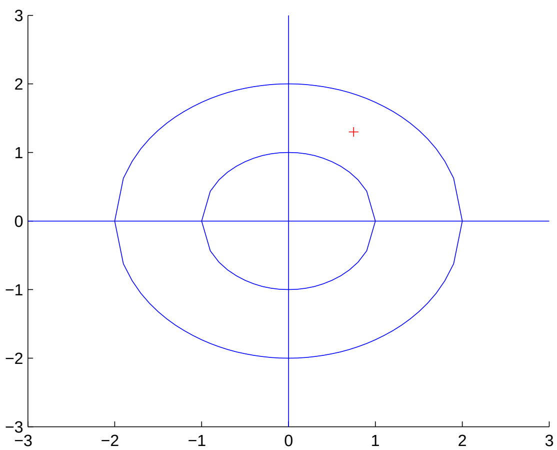
Berechnung in kartesischen Koordinaten umständlich!

In Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ gilt:

$R:$

Das Gebiet ist viel einfacher.

ABER: Koordinatenwechsel / Substitution nötig!



Transformationssatz:

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$ gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u)du \qquad (\phi'(u) \neq 0\,, \quad \forall x \in]a,b[)$$

Unter den in der Vorlesung angegebenen Voraussetzungen an Φ und D und f gilt hier:

$$\int_{\Phi(D)} f(\boldsymbol{x})d(\boldsymbol{x}) = \int_D f(\Phi(\boldsymbol{u}))\cdot|detJ\Phi(\boldsymbol{u})|d\boldsymbol{u} \qquad (|detJ\Phi(\boldsymbol{u})| \neq 0\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in D^\circ)$$

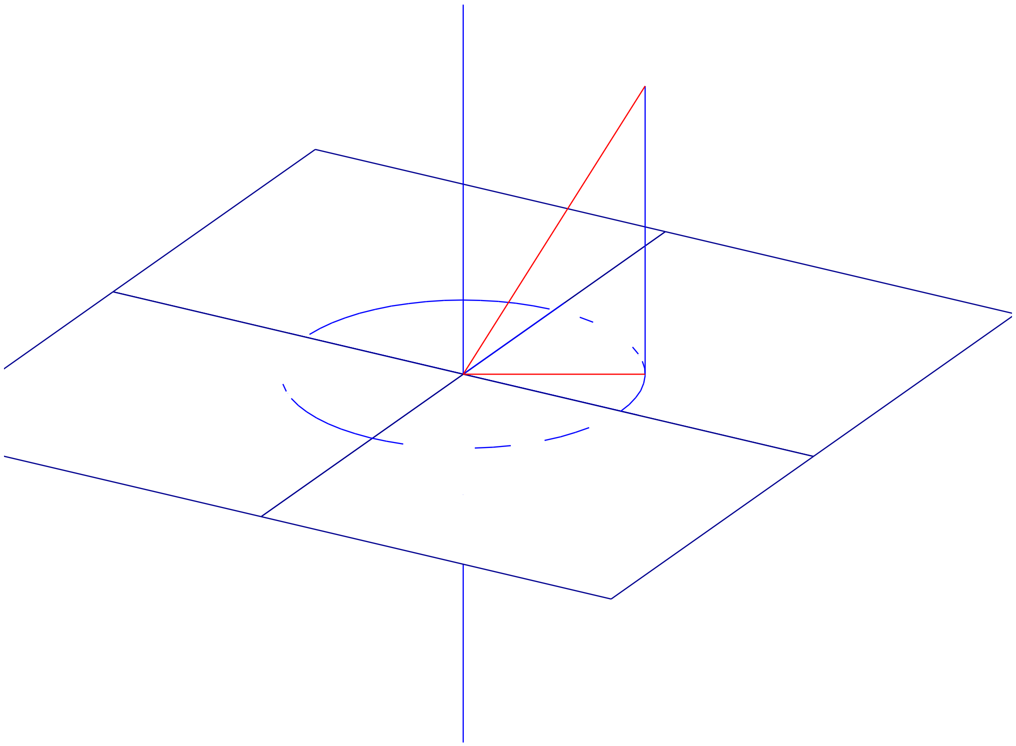
Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = r$$

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$|det(J\Phi(r,\varphi))| = r^2\cos(\theta).$



$r =$

$z =$

$R =$

$x =$

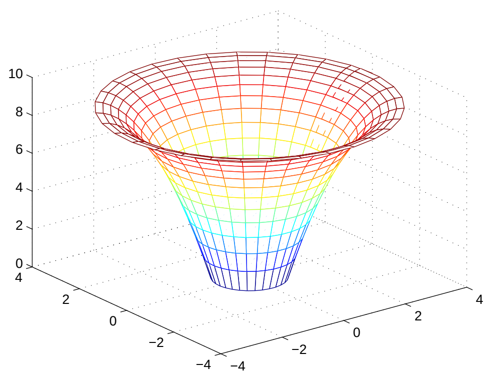
$y =$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Im Beispiel 3: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ 0 \leq z \leq 9 - (4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2$



Elliptische Kugelkoordinaten

Zum Beispiel bei $\Phi(D) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ br\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ cr\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$|det(J\Phi(r,\varphi))| = abcr^2\cos(\theta)$

Im Beispiel 6: Rotationsellipsoid

$E = \{(x,y,z)^T : x^2 + y^2 + z^2/4 \leq 1\}.$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} =$$

det$(J(\Phi) =$

Elliptische Zylinderkoordinaten: analog

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \Phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = \begin{vmatrix} a\cos(\varphi) & -ra\sin(\varphi) & 0 \\ b\sin(\varphi) & rb\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr$$

Beispiel 5:

Gegeben ist ein Turms mit elliptischem Grundriss:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ,\ 0 \le \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \le 25, \quad 0 \le z \le 20 \right\}.$$

Im Beispiel 2 war $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ zu integrieren über den halben Kreisring

$R:\ 4\ \leq\ x^2+y^2\ \leq\ 9, \qquad x \leq 0$

$r \in \qquad\qquad \phi \in$

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y)\,d(x,y) &= \int_R \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x,y) = \int \int \frac{1}{r^2} \qquad\quad d\phi\,dr \\
&= \int \frac{1}{r}\,[\qquad\quad]\qquad dr \\
&= \pi \int \frac{1}{r}\,dr = \pi(\ln(3)-\ln(2)).
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Es sei $f(x,y) = z \cdot (x+y)^2$ zu integrieren über

$D:\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 16,\ 0 \leq z \leq 9-(4-\sqrt{x^2+y^2})^2$

$$\int_D z \cdot (x+y)^2 \, d(x,y,z) = \int \int \int z \, (r\cos(\phi)) + r\sin(\phi))^2 \ldots d\phi \, dz \, dr$$

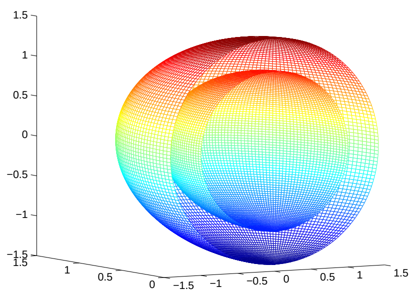
$$= \int \int \int z \, (r^2\cos^2(\phi)) + 2r^2\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\sin^2(\phi)) \ldots \, d\phi \, dz \, dr$$

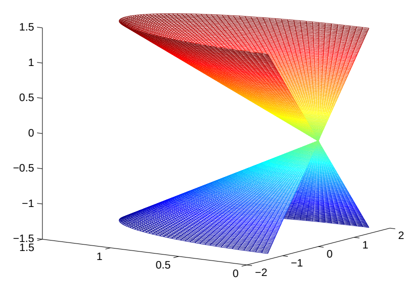
$$= \pi \int_0^4 r^3 \, \left[z^2\right]_0^{9-(4-r)^2} \, dr = \pi \int_0^4 r^3 \, (9-(4-r)^2)^2 \, dr$$

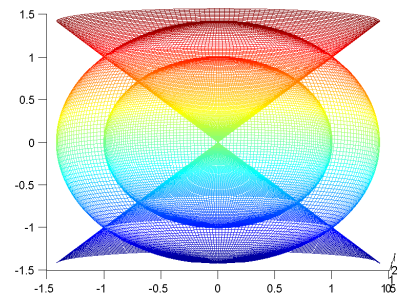
Beispiel 4:

Berechnen Sie für den wie folgt beschriebenen Teil D einer Kugelschale mit homogener Massendichte $\rho = 2$:

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\,,\, y \geq 0\,,\, z^2 \leq x^2 + y^2 \right\}.$$







Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse und
bzgl. der zur $z-$Achse parallelen Achse A durch den Punkt $(3, 4, 0)^T$.

Hinweis: $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(x) + \cos(3x))$

Lösung:)

Übergang zu Kugelkoordinaten:

$1 \leq\ x^2 + y^2 + z^2 \leq\ 2\ :$

$y \geq\ 0:$

$$\Phi\ :\ \begin{cases} r \in \qquad\qquad\qquad\qquad , \phi \in \qquad\qquad\qquad\qquad , \theta \in \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$z^2 = r^2\sin^2(\theta) \leq x^2 + y^2 = r^2\ \cos^2(\varphi)\ \cos^2(\theta) + r^2\ \sin^2(\varphi)\ \cos^2(\theta)$$

Die Determinante der Transformation ist aus der Vorlesung bekannt:

$$J\Phi\ =\ \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\ \cos\ \phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\ \sin\ \phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix},\ \text{det}\, \boldsymbol{J}\Phi =\ r^2\cos\theta$$

$a_z(x,y,z) :=$ Abstand zur $z-$Achse $= \sqrt{x^2+y^2}$.

$$x^2+y^2 = r^2\,\cos^2(\varphi)\,\cos^2(\theta) + r^2\,\sin^2(\varphi)\,\cos^2(\theta) = r^2\,\cos^2(\theta)$$

$$\Theta_z = \int_D \rho\cdot(a_z(x,y,z))^2\,d(x,y,z)$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\pi} 2r^2\cos^2(\theta)\cdot r^2\cos(\theta)\cdot 1\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(\theta) \int_0^{\pi} 2\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

Also

$$\Theta_z = \Big(\int_1^{\sqrt{2}} r^4\,dr\Big)\cdot\Big(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(\theta)\,d\theta\Big)\cdot\Big(\int_0^{\pi} 2\,d\varphi\Big)$$

$$=\frac{2\pi}{5}(\sqrt{2}^5 - 1^5)\ \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3}{4}\,\cos(\theta) + \frac{1}{4}\,\cos(3\theta)\right)\,d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2}-1)\cdot\left[\frac{3}{4}\,\sin(\theta)+\frac{1}{12}\,\sin(3\theta)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$=\frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2}-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\,\sin(\frac{\pi}{4})+\frac{1}{6}\,\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$$

$$=\frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2}-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\pi}{5}\,\frac{5}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{3}\,(8-\sqrt{2})\,.$$

$\Theta_{\boldsymbol{A}} = md^2 + \Theta_z$

Mit $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

und

$$m = \int_D \rho \, d(x,y,z) = 2 \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \int\limits_0^{\pi} r^2 \cos(\theta) d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= 2\,\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \cos(\theta) d\theta \, dr = 2\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} r^2 \left[\sin(\theta)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} dr$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} r^2 \, dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(\sqrt{2}^3 - 1) = \frac{\pi}{3}(8 - 2\sqrt{2})$$

$\Theta_{\boldsymbol{A}} = md^2 + \Theta_z = \frac{\pi}{3}(8 - 2\sqrt{2}) \cdot 25 + \frac{\pi}{3}(8 - \sqrt{2})$

Beispiel 5:

Gegeben ist ein Behälter im Form eines Turms mit elliptischem Grundriss:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ,\ 0 \leq \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 25, \quad 0 \leq z \leq 20 \right\}.$$

Die Dichte eines Stoffes im Turm wird modelliert durch $\rho(x, y, z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$.

Zu berechnen: Masse des Stoffes im Turm.

Lösung: Koordinatentransformation

Elliptische Zylinderkoordinaten: $x = 4r\cos(\varphi)\,,\ y = 3r\sin(\varphi)\,,\ z = z\,.$

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatenransformation gilt

$$\det \boldsymbol{J} = \det \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi) & -4r\sin(\varphi) & 0 \\ 3\sin(\varphi) & 3r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Für die Parameter gilt: $r \in \ [0,5]\,,\ \varphi\ \in [0,2\pi]\,,\ z \in [0,20]$.

Für die Masse erhält man daher

$$V = \int_0^5 \int_0^{20} \int_0^{2\pi} \rho(r,\varphi,z)\,12r\,d\varphi\,dz\,dr =$$

$$= 24\pi \int_0^{20} \int_0^5 \frac{1}{1+z^2}\,r\ dr\,dz\ =$$

$$= 300\pi \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2}\,dz\ =\ 300\pi\arctan(20).$$

Bei Bedarf vor Ort: Beispiel 6

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$E = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2/4 \leq 1\}.$

Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\int\limits_E (3z^2 - x^2 - y^2)\, d(x, y, z)\, .$$

einmal unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und zum Andern unter Verwendung „elliptischer Kugelkoordinaten“.

$$x^2+y^2+z^2/4 \ \leq\ 1\,, \qquad f(x,y,z)=3z^2-(x^2+y^2)$$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ \Phi(u) \ = \ \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 2r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

det$(J(\Phi) =$

Zu integrieren

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (12r^2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta))\,(2r^2\cos(\theta))d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$=4\pi \int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\left(13\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos(\theta)\right)\,d\theta\,dr$$

Zylinder–Koordinaten $x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi),\ z = z.$

$r \in [0,1],\ \phi \in [0,2\pi],\ z \in [-2\sqrt{1-r^2}, 2\sqrt{1-r^2}].$

det $J(\Phi) =$

Zu integrieren

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-2\sqrt{1-r^2}}^{2\sqrt{1-r^2}} (3z^2 - r^2)\, r dz\, d\varphi\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-r^2}} (3rz^2 - r^3)\, dz\, dr$$

Ergebnis: $16\pi/3$