Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 5 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

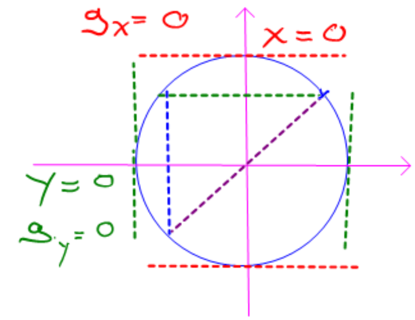
Ebene Kurven, Extrema unter Nebenbedingungen, Integration

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

für die Klausur DGL I (LUM): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Ebene Kurven, singuläre Punkte



Beispiel 1: Der Kreis $g(x, y) := x^2 + y^2 - 25 = 0$ hat

horizontale Tangenten für $g_x = 2x = 0$,

vertikale Tangenten für $g_y = 2y = 0$,

Symmetrie:

zur $x-$Achse : $g(x, y) = g(x, -y)$

zur $y-$Achse : $g(x, y) = g(-x, y)$

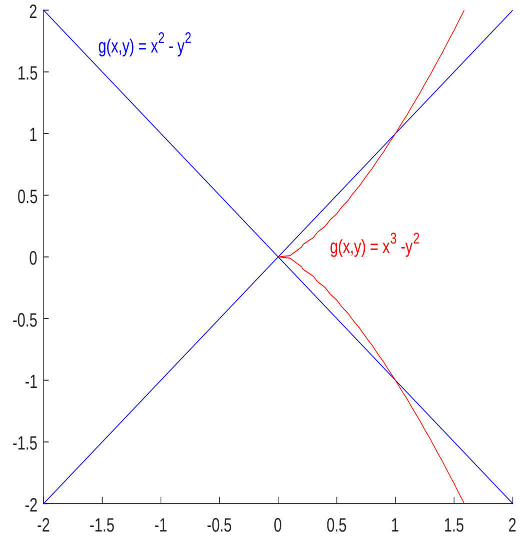
zum Ursprung : $g(x, y) = g(-x, -y)$

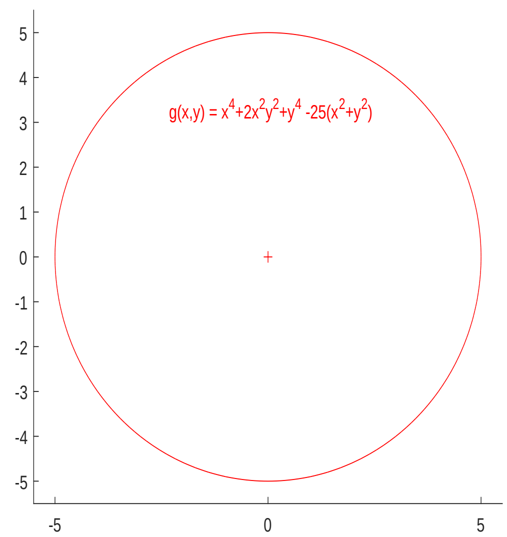
Kreis: da in g nur gerade Potenzen auftauchen, ist die Kurve symmetrisch zur $x-$Achse, zur $y-$Achse und zum Ursprung.

Der Kreis hat keine Punkte mit $g_x = g_y = 0$. Sogenannte **singuläre Punkte**.

Bei **singulären Punkten** unterscheidet man zwischen

Doppelpunkten, Rückkehrpunkten/Spitzen und isolierten Punkten





Allgemein: Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x, y) = 0$$

Singulärer Punkt: $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$

In einem solchen Punkt: keine Garantie, dass die Kurve nach x oder y parametrisiert werden kann.

Klassifikation über die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Hessematrix $Hg(x_0, y_0)$ von g

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Doppelpunkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: **isolierter Punkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix $\neq$ Nullmatrix : **Rückkehrpunkt/Spitze**.

Horizontale Tangente: $g_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0.$

Vertikale Tangente: $g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_x(x_0, y_0) \neq 0.$

Beispiel 2: Kurve beschrieben durch:

$$g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

a) **Symmetrien**

$$g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y) = g(-x,-y)$$

$\Longrightarrow$ die Kurve symmetrisch zur $y-$Achse, zur $x-$Achse und zum Ursprung.

b) **singuläre Punkte**

$$g_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$2x(2x^2-1) = 0$

$$g_y(x,y) = 2y = 0 \Longleftrightarrow \boxed{y = 0}$$

Kandidaten: $P_0 = \binom{0}{0}$, $P_1 = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$, $P_2 = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$

Die Punkte müssen auf der Kurve liegen: $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$

$g(P_0) = g(0,0) = 0$

$g(P_{1,2}) = g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0^2 = -\frac{1}{4} \neq 0 \Longrightarrow P_{1,2} \notin$ Kurve

Einziger singulärer Punkt: $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Klassifikation des singulären Punktes:
– berechne die zweiten Ableitungen

$$g_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2, \qquad g_{xy}(x,y) = 0, \qquad g_{yy}(x,y) = 2$$

– und die Hessematrix im singulären Punkt:

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} g_{xx}(0,0) & g_{xy}(0,0) \\ g_{yx}(0,0) & g_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: Doppelpunkt, × P_0 ist Doppelpunkt

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: ,isolierter Punkt,

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix $\neq$ Nullmatrix : Rückkehrpunkt/Spitze.

c) Gesucht sind Punkte mit **horizontaler Tangente** $g = g_x = 0$, $g_y \neq 0$.

Oben schon geprüft: $g_x = 0,\ g_y \neq 0 \iff \left(x = 0 \lor x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \land y \neq 0$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ y \end{pmatrix}$

Was muss noch gelten? $g = 0$

$g(0, y) = 0^4 - 0^2 + y^2 \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 0 \longrightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ singulärer Pkt.

$g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + y^2 = 0 \iff y^2 = \frac{1}{4} \iff y = \pm 1/2$

Damit erhält man die Punkte

$P_{1,2} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}$ und $P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}$

d) Gesucht sind Punkte mit **vertikaler Tangente** $g = g_y = 0$, $g_x \neq 0$.

Aus i) $g_y = 0 \iff y = 0$

Der Punkt muss auf der Kurve liegen,also:

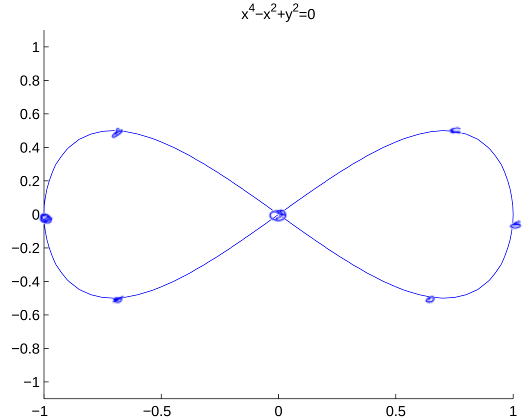
$$g(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \lor \quad x = \pm 1$$

Kandidaten:

$P_0 = \binom{0}{0}$: singulärer Punkt

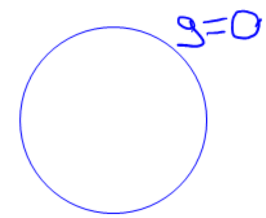
$\underbrace{P_{5,6} = \binom{\pm 1}{0}}$: $g_x \neq 0$ siehe oben $\left(g_x = 0 \iff x \in \left\{ 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \right)$

Punkte mit vertikalen Tangenten



Extrema unter Nebenbedingungen:

Beispiel 1 Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:



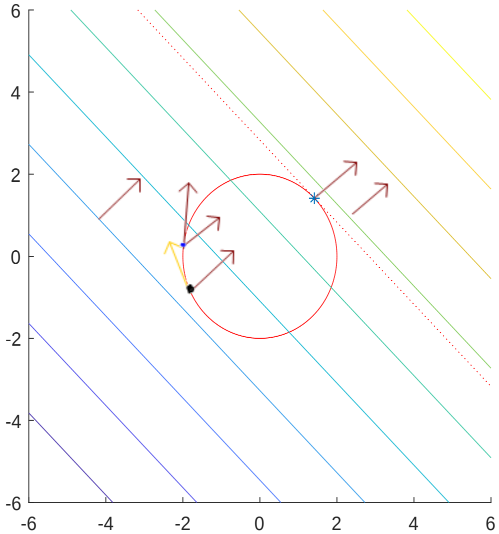
$$\begin{aligned} &\text{Gesucht sind die Minima/Maxima von} \quad && f(x,y) = x + y \\ &\text{unter der Nebenbedingung} \quad && g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$ ist eine Höhenlinie von g gegeben.

- **In jedem Punkt steht der Gradient senkrecht auf die Höhenlinie.**

- **Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.**

Analoges gilt für die Höhenlinien/Gradienten von f.



$f(x,y) = x + y = c$

$y = c - x$

Geratene notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität: grad(f) + grad(g) müssen parallel sein

$$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y) = 0.$$

$$f_x + \lambda g_x = 0$$

$$f_y + \lambda g_y = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

Damit hätten wir das Gleichungssystem

$$f_x + \lambda g_x = 0, \qquad f_y + \lambda g_y = 0, \qquad g = 0$$

oder mit $F(x,y) := f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$

Für zulässige Punkte die Bedingung $\boxed{\operatorname{grad} F(x,y) = \mathbf{0}}$

Mit $f(x,y) = x + y\,, \qquad g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0\,.$

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0: \; 1 + 0 = 0 \; ↯$

$$\begin{aligned} 1 \;+\; \lambda \cdot (-2x) &= 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge x = \tfrac{1}{2\lambda}\,, \\ 1 \;+\; \lambda \cdot (-2y) &= 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge y = \tfrac{1}{2\lambda}\,, \\ 4 \;-\; x^2 - y^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

$$4 - \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \overset{!}{=} 0$$

Setze die Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile ein:

$$4 - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} = 0 \Longrightarrow 4 = \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{8} \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{2\lambda_1} = \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

Wir erhalten also zwei Lösungen:

$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_1 = y_1 = -\sqrt{2}$

und

$P_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_2 = y_2 = \sqrt{2}$

Wenn die geratene Bedingung tatsächlich notwendig ist, sind die einzigen Kandidaten P_1 und P_2.

Zulässige Menge ist $\underbrace{\text{kompakt}}^{\text{abgeschlossen und beschränkt}}$. Minimum und Maximum werden angenommen.

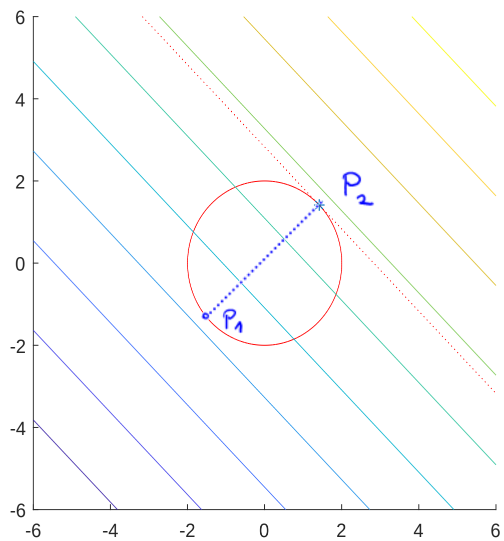
$\longrightarrow$ Funktionswerte vergleichen!

$-\sqrt{2}-\sqrt{2} \qquad\qquad \sqrt{2}+\sqrt{2}$

$$f(P_1) = -2\sqrt{2}, \qquad f(P_2) = 2\sqrt{2}.$$

Einziges lokale Minimum (und damit das globale Minimum) auf der zulässigen Menge liegt in P_1.

Einzige lokale Maximum (und damit das globale Maximum) auf der zulässigen Menge liegt in P_2.



Optimierung mit Gleichungsnebenbedingungen

hier $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ oder $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Problem: $\boxed{f(\boldsymbol{x}) \; = \; \text{min/max} \; !}$ unter der(den) Nebenbedigung(en)

$$\boxed{g(\boldsymbol{x}) \; = \; 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) \; &= \; 0 \\ h(\boldsymbol{x}) \; &= \; 0 \end{aligned}}$$

Regularitätsbedingung (RB)

Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen hat maximalen Rang:

Bei einer Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = 0$ heißt das $\operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$,

bei zwei Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}) = 0,\; h(\boldsymbol{x}) = 0:$ $\qquad$ Rang $\begin{pmatrix} \text{grad}\, g(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, h(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 2,$

jeweils für die zulässigen Punkte.

Euler, Lagrange: Definiere mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$ die Lagrange Funktion

$$F := f + \lambda g \qquad bzw. \qquad F := f + \lambda g + \mu h$$

Notwendige Bedingung für Min/Max von f unter g=(h=)=0

Wenn die **Regularitätsbdingung** erfüllt ist, ist jedes Extremum von f unter den Nebenbedingungen g=(h=)=0, ein zulässiger stationärer Punkt der **Lagrange-Funktion** $F(x, y, z)$. D.h.

$$\boxed{\text{grad } F(x, y, z) = 0, \quad g = h = 0}$$

Bestimme also stationäre Punkte von F d.h. Punkte mit $\mathrm{grad}\, F = \mathbf{0}$,

für die zusätzlich : $g = 0$ bzw. $g = h = 0$ gilt!

Ausführlicher für $\mathbb{R}^3$:

(Im Fall $\mathbb{R}^2$: Zeile 3 und 5 streichen und überall sonst z streichen und $\mu = 0$ setzen.)

$$F := f + \lambda g + \mu h$$

ohne h

im $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= f_x + \lambda\, g_x + \mu\, h_x = 0 \\ F_y &= f_y + \lambda\, g_y + \mu\, h_y = 0 \\ F_z &= f_z + \lambda\, g_z + \mu\, h_z = 0 \\ F_\lambda &= g(x,y,z) = 0 \\ F_\mu &= h(x,y,z) = 0 \end{aligned}}$$

lösen

$\longrightarrow$ Kandidaten

$\longrightarrow$ Klassifikation Min/Max/Sattel?

Klassifizierung: (Min, Max oder Sattel)

A) Zulässige Menge kompakt und f stetig : $\Longrightarrow$ Min/Max werden angenommen.

Kandidat mit höchstem Funktionswert $=$ globales Maximum.

Kandidat mit kleinstem Funktionswert $=$ globales Minimum.

B) Bedingungen zweiter Ordnung : (im Fall von 2 Nebenbedingungen)

Sei $\boldsymbol{x}_0$ zulässig (d.h. $g(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0) = 0$),
die Regularitätsbedingung erfüllt in $\boldsymbol{x}_0$, und es gelte

$$\exists \lambda, \mu \quad \text{mit} \quad \operatorname{grad} F(\boldsymbol{x}_0) = 0$$

Definiere Tangentialraum:

$$TG(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{w} \,:< \boldsymbol{w}, \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_0) >= 0 \ \text{ und } \ < \boldsymbol{w}, \operatorname{grad} h(\boldsymbol{x}_0) >= 0\,\}$$

Dann ist

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Minimum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

und

$$\boxed{\textbf{hinreichend für lokales Minimum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} > 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

Analog

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Maximum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \leq 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

und

$$\boxed{\textbf{hinreichend für lokales Maximum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} < 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

Das heißt insbesondere : die notwendigen Bedingungen aus dem unrestingierten Fall für Minima (Maxima), nämlich Hesse-Matrix positiv (negativ) semidefinit sind hier keine notwendigen Bedingungen mehr. Die Matrix kann z.B. auch bei einem Minimum negative Eigenwerte haben, sofern die zugehörigen Eigenvektoren keine zulässigen Richtungen sind, d.h. aus der zulässigen Menge raus führen.

Beispiel 2: [Alte Klausuraufgabe]

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) \;=\; x \;-\; 8y \;+\; z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

$$g(x,y,z) \quad = \quad x^2 \;+\; (y+4)^2 \;+\; z^2 \;-\; 25 \quad = \quad 0$$

und

$$h(x,y,z) \quad = \quad x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;-\; 9 \quad = \quad 0.$$

Lösungsskizze:

Regularitätsbedingung (RB):

$$J(g,h)(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2x & 2(y+4) & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \leftarrow \text{Rang}=2\,?$$

RB verletzt falls

1\. Zeile : $\alpha \cdot 2x = 2x$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+4) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \lor x = 0 \\ \text{nicht erfüllbar für } \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \lor z = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ in 2. Zeile $2y + 8 = 2y$ $\lightning$

RB kann also nur für $x = z = 0$ verletzt sein. Gibt es zulässige Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$g(0, y, 0) = 0 + (y+4)^2 + 0 - 25 = 0 \implies y = -4 \pm 5,$$

$y = -9$ oder 1 $\lightning$

$$h(0, y, 0) = 0 + y^2 + 0 - 9 = \implies y = \pm 3.$$

Es gibt keine zulässige Punkte mit $x = z = 0$

Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Mit $f(x, y, z) = x - 8y + z$ und der Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ erhält man als notwendige Bedingungen für Extrema:

$\mathrm{I})\ F_x = 0:\quad f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 0 \qquad = 1 + \lambda \cdot 2x + \mu\, 2x$

$F_y = 0:\quad f_y + \lambda g_y + \mu h_y = 0 \qquad = -8 + \lambda\, 2(y+4) + \mu\, 2y$

$\mathrm{II})\ F_z = 0:\quad f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 0 \qquad = 1 + \lambda\, 2z + \mu\, 2z$

$g = 0:\quad x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0 \; *$

$\mathrm{III})\ h = 0:\quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \; **$

$* - **:\quad (y+4)^2 - y^2 - 25 + 9 = 0$

$y^2 + 8y + 16 - y^2 = 16$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$(y+4)^2 - y^2 = 16 \iff 8y + 16 = 16 \iff \boxed{y = 0}\,.$$

$-8 + \lambda \cdot 2 \cdot 4 + 0 = 0$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $\boxed{\lambda = 1}$ und damit

I) $1 + 2x + 2\mu x = 0\,,$
II) $1 + 2z + 2\mu z = 0\,,$
III) $x^2 + z^2 - 9 = 0\,,$
$\lambda = 1\,, \qquad y = 0\,.$

I - II : $2(x - z) + 2\mu(x - z) = (x - z)\, 2(1 + \mu) \implies \boxed{\mu = -1}$

oder $\boxed{x = z}$

$(1+\mu)(x-z)=0 \iff \mu=-1$ oder $x=z$.

$\mu=-1$: I) $1+2x-2x \overset{!}{=} 0$ ↯

$\boxed{x=z}$: III) $x^2+x^2=9$ $x^2=\frac{9}{2}$ $x=z=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$y=0$

$\lambda=1$

$\mu=?$

Kandidaten und Funktionswerte für $f(x,y,z)=x-8y+z$

μ kann man aus I oder II berechnen $\mu=-\frac{1+2x}{2x}$. Brauch man hier aber nicht

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad f(P_1)=3\sqrt{2},\qquad P_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad f(P_2)=-3\sqrt{2}.$$

Da der Schnitt der beiden Kugeloberflächen (leer, Punkt oder Kreisrand) eine kompakte Menge ist werden Minimum und Maximum der stetigen Funktion f angenommen. Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass in P_1 das globale Maximum und in P_2 das globale Minimum liegt.

Beispiel 3) Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x,y) \;=\; x^2 \,+\, y^2 \;=\; \text{min!}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 \;=0.$$

a) Überprüfen Sie die Regularitätsbedingung.

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1,-1)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator λ ein zulässiger stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion F ist.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(1,-1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $H_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum ker $\mathrm{D}g(\boldsymbol{x}_0) = TG_g(\boldsymbol{x}_0)$.

Lösungsskizze:

Teil a): $g(x,y) = e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1$

$\frac{d}{dz} \arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{J}g(x,y) = \operatorname{grad} g(x,y) = \left(e^{x-1}, -\frac{1}{1+(1+y)^2}\right) \neq (0,0) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{grad} g(x,y)$ hat Rang 1 (Regularitätsbedingung).

Zulässigkeit: $g(1,-1) = \underbrace{e^{1-1}}_{1} - \underbrace{\arctan(\underbrace{-1+1}_{0})}_{0} - 1 = 0$ ✓

Lagrange-Funktion: $F = f + \lambda \cdot g = x^2 + y^2 + \lambda \left(e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1\right)$.

$g(x,y)$

Die notwendige Bedingung 1. Ordnung lautet: $\operatorname{grad} F(1,-1) = \mathbf{0}$.

Zu zeigen: $\exists \lambda$ mit $\operatorname{grad} F(1,-1) = \mathbf{0}$

$F_x = 0$
$F_y = 0$

$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda e^{x-1} \\ 2y + \lambda \frac{-1}{1+(y+1)^2} \end{pmatrix}^T$

$\operatorname{grad} F(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + \lambda e^{1-1} \\ 2(-1) + \lambda \frac{-1}{1+(-1+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -2-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} 2 = -\lambda \\ -2 = \lambda \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lambda = -2}$

$\binom{1}{-1}$ ist für $\lambda = -2$ stationärer Punkt von F.

Teil b): $\operatorname{grad}_{x,y} F(x,y) = (F_x,\, F_y) = (2x + \lambda e^{x-1}, 2y - \lambda \dfrac{1}{1+(1+y)^2})$

$$\boldsymbol{H}_{x,y}F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda e^{x-1} & 0 \\ 0 & 2-\lambda \cdot \underbrace{\dfrac{-2(1+y)}{(1+(1+y)^2)^2}}_{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1) = \begin{pmatrix} 2+\lambda e^{0} & 0 \\ 0 & 2-\lambda \cdot 0 \end{pmatrix} \overset{\lambda=-2}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d.h. $\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1)$ ist semidefinit (det $\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1) = 0$).

Untersuchung auf dem Tangentialraum:

$$\text{Ker}Dg(\boldsymbol{x}_0) = TG(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} = 0\}$$

$\boldsymbol{w} = \binom{x}{y}$ mit $\underbrace{\operatorname{grad} g(1,-1)\binom{x}{y} = 0}_{⊛} \Rightarrow x - y = 0$

$$\operatorname{grad} g(1,-1) = \begin{pmatrix} e^{1-1} \\ \dfrac{-1}{1+(1+(-1))^2} \end{pmatrix}^T = \binom{1}{-1}^T$$

Achtung hier ist zufällig $\operatorname{grad} g(1,-1) = (1,-1)$

Der grad muss in ⊛ nicht der Punkt!

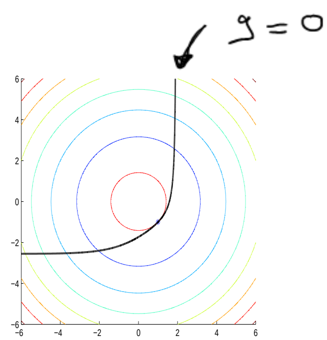
$$\mathrm{Ker}\,Dg(\boldsymbol{x}_0) = TG(\boldsymbol{x}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Für alle $\boldsymbol{w} \neq 0$ aus dem Tangentialraum gilt mit einem $\alpha \neq 0$:

$$\boldsymbol{w}^T\, \boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1)\, \boldsymbol{w} = \alpha \cdot (1,1) \boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1) \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 \cdot (1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (1,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\alpha^2 > 0\,.$$

d.h. die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,-1)$ ein strenges lokales Minimum vor.



Bereichsintegrale :

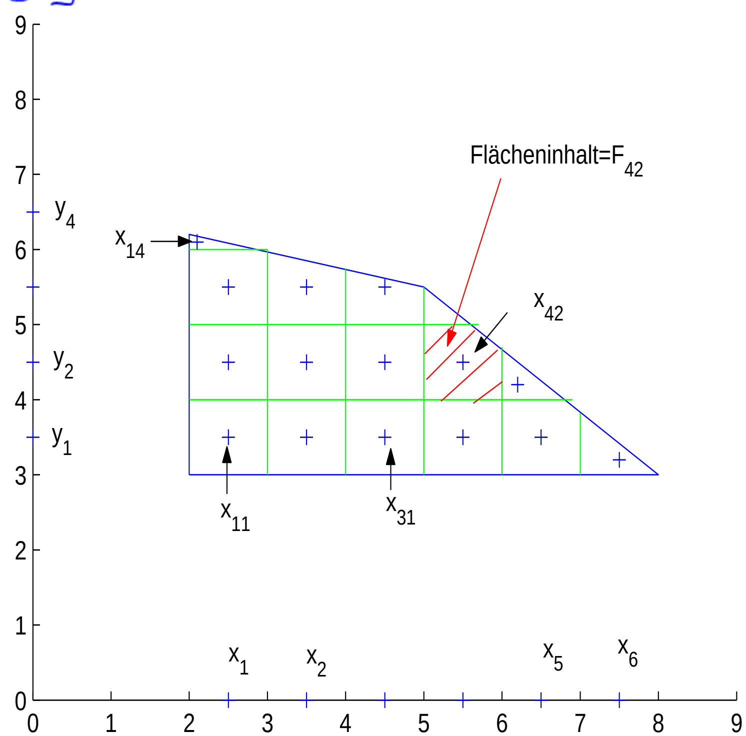
Beispiel: Gegeben Dichte $\rho(x, y)$. Gesucht Masse.

Näherung : dichte konstant auf jedem Kästchen $\longrightarrow$

$$M \approx \sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij}$$

$\Delta x \cdot \Delta y$

$$\int_{y_a}^{y_b} \underbrace{\int_{x_a}^{x_b} \rho(x,y)\, dx}\, dy$$



Für immer feinere Unterteilung sollte das Ganze gegen die Masse gehen.

$$\sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij} \longrightarrow \int_D \rho(x,y)\, d(x,y)$$

Allgemeiner sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, : Die Größe $f(\boldsymbol{x})$ wird über den Bereich D ,,aufsummiert".

Speziell für $f = 1$ erhält man im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

$$\int_D 1\, d\boldsymbol{x} \quad = \text{ Flächen- bzw. Volumeninhalt von } D$$

vgl. Hausaufgabe 3
Teil 6

Analog partieller Ableitungen : immer nur eine aktuelle Variable

Integration wie im $\mathbb{R}^1$

Beispiel 1:

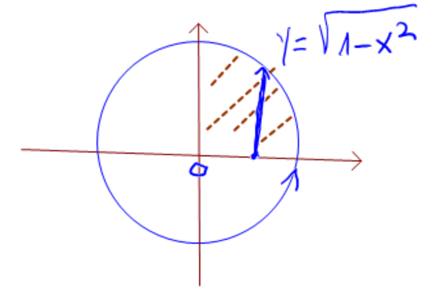
$f(x,y) = x \cdot y$ soll über das Rechteck $\underset{x}{[0,2]} \times \underset{y}{[1,4]}$ integriert werden.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,d\boldsymbol{x} &= \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y \, dx\, dy \\
&= \int_1^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_1^4 y \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] dy \\
&= \int_1^4 2y\, dy = 4^2 - 1^2 = 15.
\end{aligned}$$

Oben: Reihenfolge der Integration egal

$$\int_D f(x,y)\,d\boldsymbol{x} = \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y\, dx\, dy = \int_0^2 \int_1^4 x \cdot y\, dy\, dx$$

Wie geht das bei anderen Integrationsbereichen? Zum Beispiel



$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 1, \; x, y \geq 0 \right\}$$

Ziel: Beschreibe Bereich durch Angabe von obere und untere Schranken von x und y. Zum Beispiel

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

oder

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

Im unteren Fall:

$$\int_D f(x,y)\, d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$$

ACHTUNG: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$ ist UNSINN!

Normalbereich im $\mathbb{R}^2$

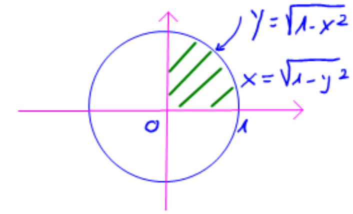
$$a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq g(x) \text{ bzw. } a \leq y \leq b, \quad h(y) \leq x \leq g(y)$$

Normalbereich im $\mathbb{R}^3$

$$a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq g(x), \quad \tilde{h}(x,y) \leq z \leq \tilde{g}(x,y) \qquad \text{bzw. permutiert}$$

Integration z.B.

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \int_{\tilde{h}(x,y)}^{\tilde{g}(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$



Beispiel 2: $f(x,y)=\sqrt{1-y^2},\ D: x^2+y^2\leq 1,\ x,y\geq 0$

Möglich aber Ungünstig wäre : $0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}dy\,dx$$

Zunächst liefern Formelsammlung

oder die Substitution: $y=\sin u, dy=\cos(u)du$:

$$\int\sqrt{1-y^2}\,dy=\int\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du\ =\int\cos^2(u)du$$

$$=\tfrac{1}{2}\int(\cos(2u)+1)\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2u)+u\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin(u)\cos(u)+u)=\tfrac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin(y)\right)$$ und damit

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin(y)\right)\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin(\sqrt{1-x^2})dx \qquad x = \cos(\varphi)$$

Substitution

$$= \left[-\frac{1}{6}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \arcsin(\sin\varphi)(-\sin(\varphi))d\varphi$$

partielle Integration

$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \varphi \cdot \sin(\varphi))d\varphi = \cdots = \frac{2}{3}$$

Viel besser:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\, dxdy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, [x]_0^{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

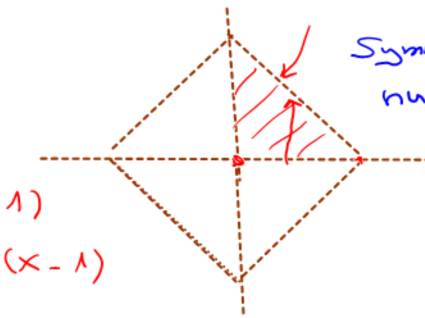
Faustregel:

Wenn möglich: Erst nach der Variablen integrieren, die in f am einfachsten vorkommt. Hier war f konstant bzgl. x

Beispiel 3: Berechnen Sie $\displaystyle\int_D (x + 3y + 2)\, d\boldsymbol{x}$

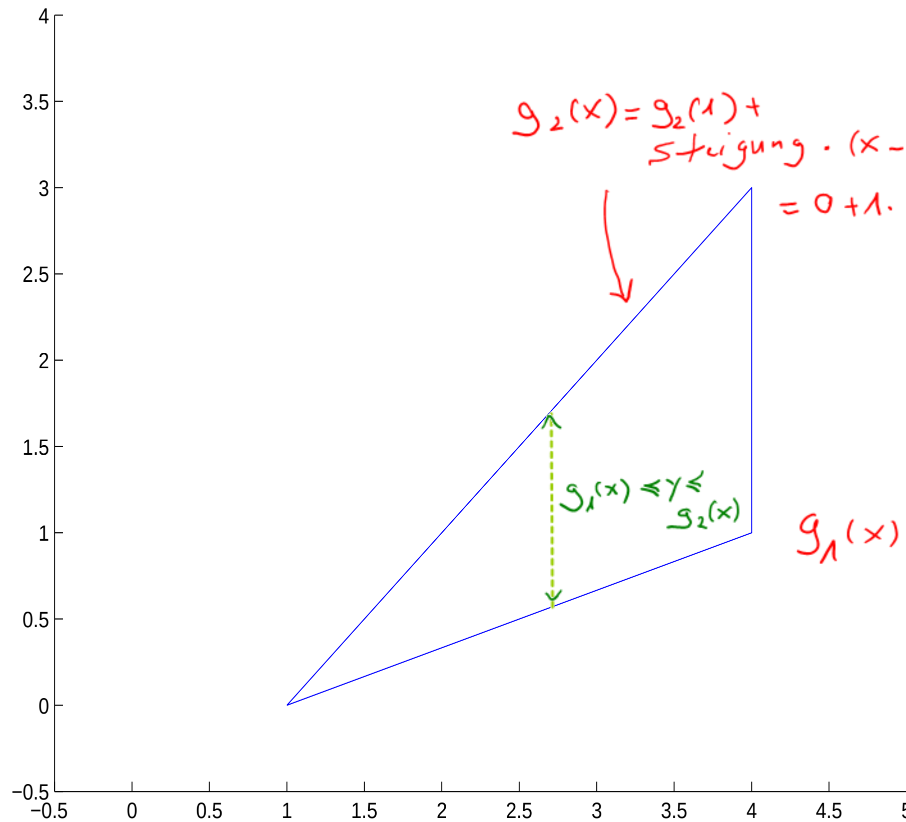
wobei D das Dreieck mit den Ecken (1,0), (4,1), (4,3) ist.

Hausaufgabe 3c: Symmetrie nutzen!



Lösung:

$g_2(x) = g_2(1) + \text{Steigung} \cdot (x-1)$
$= 0 + 1 \cdot (x-1)$



$g_1(x) = g_1(1) + \text{Steigung} \cdot (x-1)$
$= 0 + \frac{1}{3}(x-1)$

$$D:\ x \in [1,4],\ \frac{x-1}{3} \leq y \leq x-1$$

Vertauschung nicht möglich!

$$\int_D (x+3y+2)\,d\boldsymbol{x} \;=\; \int_1^4 \left[\int_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} (x+3y+2)\,dy\right]dx \;=\; \int_1^4 \left[xy+3\frac{y^2}{2}+2y\right]_{\frac{x-1}{3}}^{x-1}$$

$$\int_1^4 \left[(x+2)y \;+\; \frac{3}{2}y^2\right]_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} dx$$

$$= \int_1^4 (x+2)(x-1) - (x+2)\left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{9}\,dx$$

$$= \int_1^4 \frac{2}{3}(x^2+x-2) \;+\; \frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}\cdot(x-1)^2\,dx \;=\; \frac{243}{9}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4 \;+\; \frac{4}{3}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{64}{3} + 8 - 8 - \left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}_{5/6} - 2\right)\right] + \frac{4}{3}\cdot\frac{3^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{64}{3} + \frac{7}{6}\right] + 12 \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{135}{6} \;+\; \frac{108}{9} \;=\; \frac{243}{9}$$

Frohe Festtage und guten Start ins neue Jahr!