

Hörsaalübung 5 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

**Ebene Kurven, Extrema unter Nebenbedingungen,
Integration**

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

für die Klausur DGL I (LUM): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Ebene Kurven, singuläre Punkte

Beispiel 1: Der Kreis $g(x, y) := x^2 + y^2 - 25 = 0$ hat horizontale Tangenten für $g_x = 2x = 0$, vertikale Tangenten für $g_y = 2y = 0$,

Symmetrie:

zur x -Achse : $g(x, y) = g(x, -y)$

zur y -Achse : $g(x, y) = g(-x, y)$

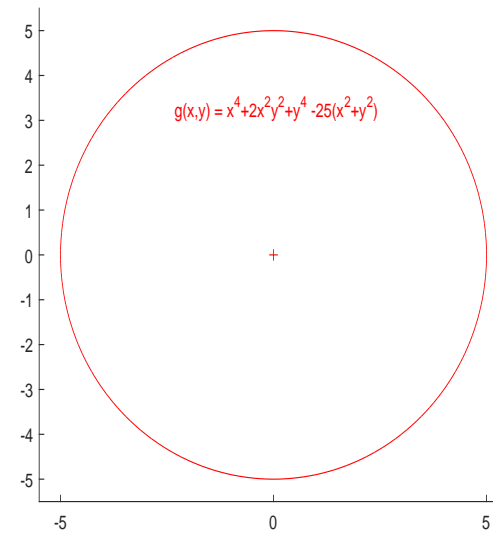
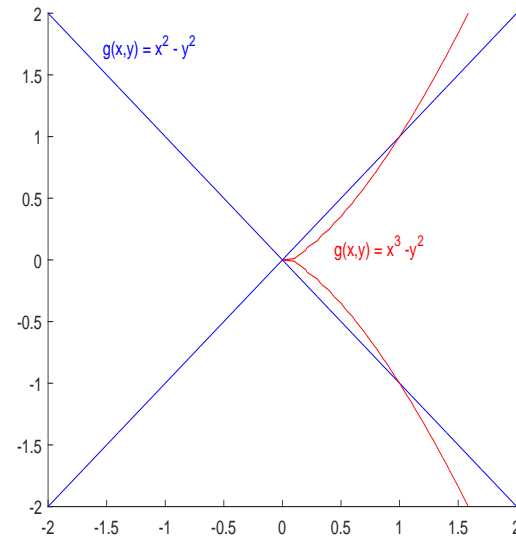
zum Ursprung : $g(x, y) = g(-x, -y)$

Kreis: da in g nur gerade Potenzen auftauchen, ist die Kurve symmetrisch zur x -Achse, zur y -Achse und zum Ursprung.

Der Kreis hat keine Punkte mit $g_x = g_y = 0$. Sogenannte **singuläre Punkte**.

Bei **singulären Punkten** unterscheidet man zwischen

Doppelpunkten, Rückkehrpunkten/Spitzen und isolierten Punkten



Allgemein: Kurve im \mathbb{R}^2 gegeben durch

$$g(x, y) = 0$$

Singulärer Punkt: $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

In einem solchen Punkt: keine Garantie, dass die Kurve nach x oder y parametrisiert werden kann.

Klassifikation über die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Hessematrix $Hg(x_0, y_0)$ von g

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Doppelpunkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: **isolierter Punkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix \neq Nullmatrix : **Rückkehrpunkt/Spitze**.

Horizontale Tangente: $g_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Vertikale Tangente: $g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Beispiel 2: Kurve beschrieben durch:

$$g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

a) **Symmetrien**

$$g(x, y) = g(-x, y) = g(x, -y) = g(-x, -y)$$

\implies die Kurve symmetrisch zur y -Achse, zur x -Achse und zum Ursprung.

b) **singuläre Punkte**

$$g_x(x, y) = 4x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_y(x, y) = 2y = 0 \iff y = 0$$

$$\text{Kandidaten: } P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte müssen auf der Kurve liegen: $g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$

$$g(P_0) = g(0, 0) =$$

$$g(P_{1,2}) = g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) =$$

Einzigster singulärer Punkt:

Klassifikation des singulären Punktes:

– berechne die zweiten Ableitungen

$$g_{xx}(x, y) = 12x^2 - 2, \quad g_{xy}(x, y) = 0, \quad g_{yy}(x, y) = 2$$

– und die Hessematrix im singulären Punkt:

$$Hg(0, 0) = \begin{pmatrix} g_{xx}(0, 0) & g_{xy}(0, 0) \\ g_{yx}(0, 0) & g_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: Doppelpunkt,

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: isolierter Punkt,

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix \neq Nullmatrix : Rückkehrpunkt/Spitze.

c) Gesucht sind Punkte mit **horizontaler Tangente** $g = g_x = 0, g_y \neq 0$.

Oben schon geprüft: $g_x = 0, g_y \neq 0 \iff \left(x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \wedge y \neq 0$.

Was muss noch gelten?

Damit erhält man die Punkte

$P_{1,2} =$ und $P_{3,4} =$

d) Gesucht sind Punkte mit **vertikaler Tangente** $g = g_y = 0, g_x \neq 0$.

Aus i) $g_y = 0 \iff y = 0$

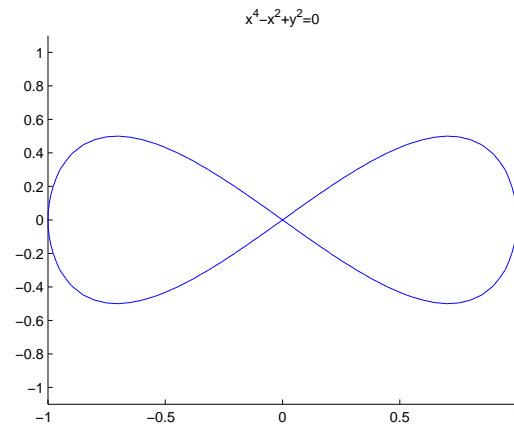
Der Punkt muss auf der Kurve liegen, also:

$$g(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 1$$

Kandidaten:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

$$P_{5,6} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}:$$



Extrema unter Nebenbedingungen:

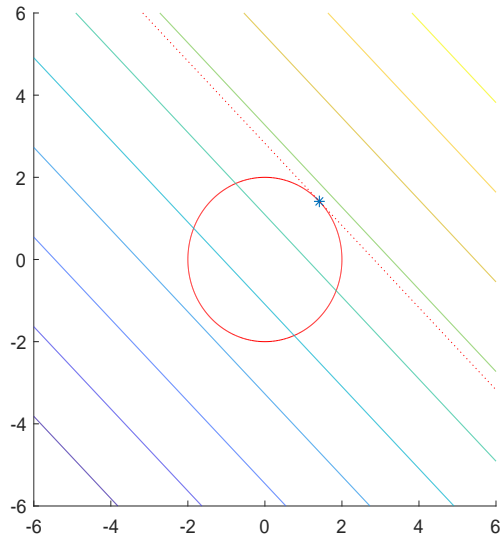
Beispiel 1 Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Gesucht sind die Minima/Maxima von } & f(x, y) = x + y \\ \text{unter der Nebenbedingung } & g(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Durch $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$ ist eine Höhenlinie von g gegeben.

- **In jedem Punkt steht der Gradient senkrecht auf die Höhenlinie.**
- **Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.**

Analoges gilt für die Höhenlinien/Gradienten von f .



Geratene notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität:

$$\text{grad } f(x, y) + \lambda \text{ grad } g(x, y) = 0.$$

Damit hätten wir das Gleichungssystem

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad g = 0$$

oder mit $F(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Für zulässige Punkte die Bedingung $\text{grad } F(x, y) = \mathbf{0}$

Mit $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$.

$$1 + \lambda \cdot (-2x) = 0 \implies \lambda \neq 0 \wedge x = \frac{1}{2\lambda},$$

$$1 + \lambda \cdot (-2y) = 0 \implies \lambda \neq 0 \wedge y = \frac{1}{2\lambda},$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0.$$

Setze die Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile ein:

$$4 - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} = 0 \implies 4 = \frac{1}{2\lambda^2}$$
$$\lambda^2 = \frac{1}{8} \implies \lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Wir erhalten also zwei Lösungen:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x_1 = y_1 = -\sqrt{2}$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x_2 = y_2 = \sqrt{2}$$

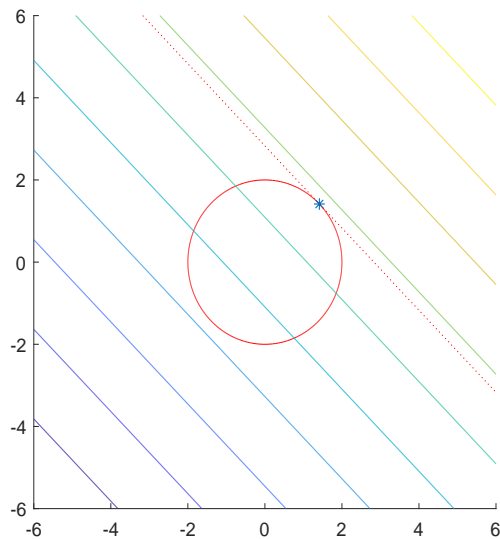
Wenn die geratene Bedingung tatsächlich notwendig ist, sind die einzigen Kandidaten P_1 und P_2 .

Zulässige Menge ist kompakt. Minimum und Maximum werden angenommen.

$$f(P_1) = -2\sqrt{2}, \quad f(P_2) = 2\sqrt{2}.$$

Einziges lokale Minimum (und damit das globale Minimum) auf der zulässigen Menge liegt in P_1 .

Einziges lokale Maximum (und damit das globale Maximum) auf der zulässigen Menge liegt in P_2 .



Optimierung mit Gleichungsnebenbedingungen

hier $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ oder $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Problem: $f(\boldsymbol{x}) = \min/\max !$ unter der(den) Nebenbedingung(en)

$$g(\boldsymbol{x}) = 0$$

bzw.

$$\begin{array}{l} g(\boldsymbol{x}) = 0 \\ h(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}$$

Regularitätsbedingung (RB)

Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen hat maximalen Rang:

Bei einer Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = 0$ heißt das $\text{grad } g(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$,

bei zwei Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}) = 0, h(\boldsymbol{x}) = 0$: $\text{Rang} \begin{pmatrix} \text{grad } g(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad } h(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 2$,

jeweils für die zulässigen Punkte.

Euler, Lagrange: Definiere mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Lagrange Funktion

$$F := f + \lambda g \quad \text{bzw.} \quad F := f + \lambda g + \mu h$$

Notwendige Bedingung für Min/Max von f unter $g=(h=)0$

Wenn die **Regularitätsbedingung** erfüllt ist, ist jedes Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g=(h=)0$, ein zulässiger stationärer Punkt der **Lagrange-Funktion** $F(x, y, z)$. D.h.

$$\text{grad } F(x, y, z) = 0, \quad g = h = 0$$

Bestimme also stationäre Punkte von F d.h. Punkte mit $\text{grad } F = \mathbf{0}$,
für die zusätzlich : $g = 0$ bzw. $g = h = 0$ gilt!

Ausführlicher für \mathbb{R}^3 :

(Im Fall \mathbb{R}^2 : Zeile 3 und 5 streichen und überall sonst z streichen und $\mu = 0$ setzen.)

$$F := f + \lambda g + \mu h$$

$$F_x = f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 0$$

$$F_y = f_y + \lambda g_y + \mu h_y = 0$$

$$F_z = f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 0$$

$$F_\lambda = g(x, y, z) = 0$$

$$F_\mu = h(x, y, z) = 0$$

Klassifizierung: (Min, Max oder Sattel)

A) Zulässige Menge kompakt und f stetig : \implies Min/Max werden angenommen.

Kandidat mit höchstem Funktionswert = globales Maximum.

Kandidat mit kleinstem Funktionswert = globales Minimum.

B) Bedingungen zweiter Ordnung : (im Fall von 2 Nebenbedingungen)

Sei x_0 zulässig (d.h. $g(x_0) = h(x_0) = 0$),
die Regularitätsbedingung erfüllt in x_0 , und es gelte

$$\exists \lambda, \mu \quad \text{mit} \quad \text{grad } F(x_0) = 0$$

Definiere Tangentialraum:

$$TG(x_0) = \{ \mathbf{w} : \langle \mathbf{w}, \text{grad } g(x_0) \rangle = 0 \text{ und } \langle \mathbf{w}, \text{grad } h(x_0) \rangle = 0 \}$$

Dann ist

notwendig für lokales Minimum: $w^T \cdot HF_x(x_0) \cdot w \geq 0, \forall w \in TG(x_0) \setminus \{0\}$

und

hinreichend für lokales Minimum: $w^T \cdot HF_x(x_0) \cdot w > 0, \forall w \in TG(x_0) \setminus \{0\}$

Analog

notwendig für lokales Maximum: $w^T \cdot HF_x(x_0) \cdot w \leq 0, \forall w \in TG(x_0) \setminus \{0\}$

und

hinreichend für lokales Maximum: $w^T \cdot HF_x(x_0) \cdot w < 0, \forall w \in TG(x_0) \setminus \{0\}$

Das heißt insbesondere : die notwendigen Bedingungen aus dem unrestrictierten Fall für Minima (Maxima), nämlich Hesse-Matrix positiv (negativ) semidefinit sind hier keine notwendigen Bedingungen mehr. Die Matrix kann z.B. auch bei einem Minimum negative Eigenwerte haben, sofern die zugehörigen Eigenvektoren keine zulässigen Richtungen sind, d.h. aus der zulässigen Menge raus führen.

Beispiel 2: [Alte Klausuraufgabe]

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = x - 8y + z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

$$g(x, y, z) = x^2 + (y + 4)^2 + z^2 - 25 = 0$$

und

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Lösungsskizze:

Regularitätsbedingung (RB):

$$J(g, h)(x, y, z) = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2(y + 4) & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

RB verletzt falls

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+4) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \vee x = 0 \\ \text{nicht erfüllbar für } \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \vee z = 0 \end{cases}$$

RB kann also nur für $x = z = 0$ verletzt sein.

$$g(0, y, 0) = 0 + (y + 4)^2 + 0 - 25 = 0 \implies y = -4 \pm 5,$$

$$h(0, y, 0) = 0 + y^2 + 0 - 9 = 0 \implies y = \pm 3.$$

Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Mit $f(x, y, z) = x - 8y + z$ und der Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ erhält man als notwendige Bedingungen für Extrema:

$$F_x = 0 :$$

$$F_y = 0 :$$

$$F_z = 0 :$$

$$g = 0 :$$

$$h = 0 :$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$(y + 4)^2 - y^2 = 16 \iff 8y + 16 = 16 \iff y = 0.$$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $\lambda = 1$ und damit

$$\text{I) } 1 + 2x + 2\mu x = 0,$$

$$\text{II) } 1 + 2z + 2\mu z = 0,$$

$$\text{III) } x^2 + z^2 - 9 = 0,$$

$$\lambda = 1, \quad y = 0.$$

I - II :

$$(1 + \mu)(x - z) = 0 \iff \mu = -1 \text{ oder } x = z.$$

$$\mu = -1 : \text{I)}$$

$$x = z : \text{III)}$$

Kandidaten und Funktionswerte für $f(x, y, z) = x - 8y + z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad f(P_1) = 3\sqrt{2}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad f(P_2) = -3\sqrt{2}.$$

Da der Schnitt der beiden Kugeloberflächen (leer, Punkt oder Kreisrand) eine kompakte Menge ist werden Minimum und Maximum der stetigen Funktion f angenommen. Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass in P_1 das globale Maximum und in P_2 das globale Minimum liegt.

Beispiel 3) Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \min!$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = e^{x-1} - \arctan(y + 1) - 1 = 0.$$

a) Überprüfen Sie die Regularitätsbedingung.

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator λ ein zulässiger stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange-Funktion F ist.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(1, -1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse-Matrix $H_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $\ker Dg(\boldsymbol{x}_0) = TG_g(\boldsymbol{x}_0)$.

Lösungsskizze:

Teil a): $g(x, y) = e^{x-1} - \arctan(y + 1) - 1$

$\implies \mathbf{J}g(x, y) = \text{grad } g(x, y) = (e^{x-1}, -\frac{1}{1+(1+y)^2}) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\implies \text{grad } g(x, y)$ hat Rang 1 (Regularitätsbedingung).

Zulässigkeit: $g(1, -1) = e^{1-1} - \arctan(-1 + 1) - 1$

Lagrange-Funktion: $F = f + \lambda \cdot g = x^2 + y^2 + \lambda (e^{x-1} - \arctan(y + 1) - 1)$.

Die notwendige Bedingung 1. Ordnung lautet: $\text{grad } F(1, -1) = \mathbf{0}$.

Zu zeigen: $\exists \lambda$ mit $\text{grad } F(1, -1) = \mathbf{0}$

$\text{grad } F(x, y) =$

$\text{grad } F(1, -1) =$

$$\text{Teil b): } \text{grad}_{x,y} F(x, y) = (F_x, F_y) = (2x + \lambda e^{x-1}, 2y - \lambda \frac{1}{1 + (1 + y)^2})$$

$$\mathbf{H}_{x,y}F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{x,y}F(1, -1) =$$

d.h. $\mathbf{H}_{x,y}F(1, -1)$ ist semidefinit ($\det \mathbf{H}_{x,y}F(1, -1) = 0$).

Untersuchung auf dem Tangentialraum:

$$\text{Ker}Dg(\mathbf{x}_0) = TG(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{grad } g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w} = 0\}$$

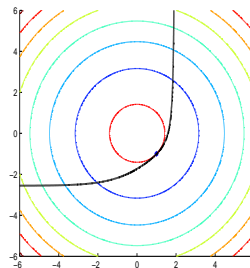
$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } \text{grad } g(1, -1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

$$\text{Ker}Dg(\mathbf{x}_0) = TG(\mathbf{x}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Für alle $\mathbf{w} \neq 0$ aus dem Tangentialraum gilt mit einem $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{H}_{x,y}F(1, -1) \mathbf{w} &= \alpha \cdot (1, 1) \mathbf{H}_{x,y}F(1, -1) \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha^2 \cdot (1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\alpha^2 > 0. \end{aligned}$$

d.h. die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_{x,y}F(1, -1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1, -1)$ ein strenges lokales Minimum vor.

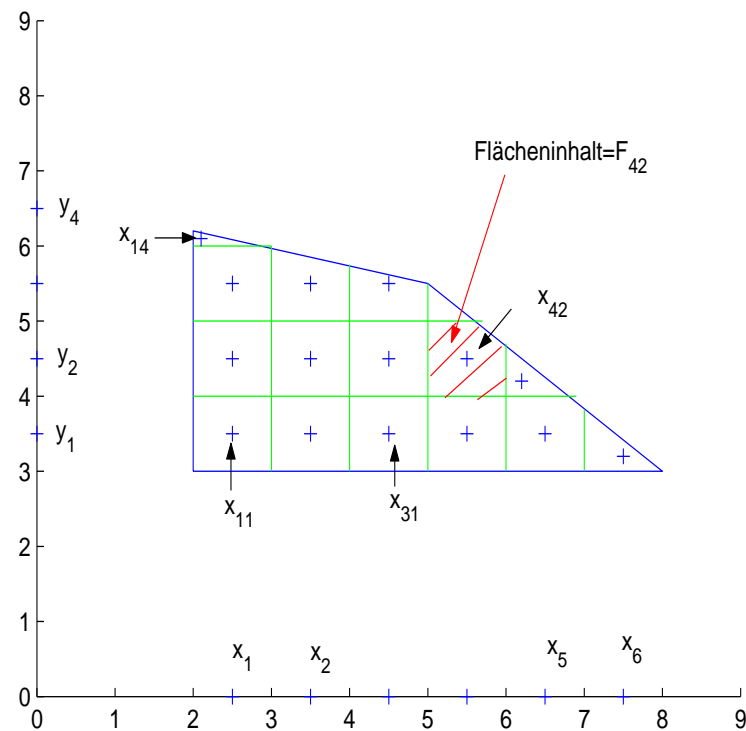


Bereichsintegrale :

Beispiel: Gegeben Dichte $\rho(x, y)$. Gesucht Masse.

Näherung : dichte konstant auf jedem Kästchen \longrightarrow

$$M \approx \sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j) F_{ij}$$



Für immer feinere Unterteilung sollte das Ganze gegen die Masse gehen.

$$\sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j) F_{ij} \longrightarrow \int_D \rho(x, y) d(x, y)$$

Allgemeiner sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, : Die Größe $f(\mathbf{x})$ wird über den Bereich D „aufsummiert“.

Speziell für $f = 1$ erhält man im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3

$$\int_D 1 d\mathbf{x} = \text{Flächen- bzw. Volumeninhalt von } D$$

Analog partieller Ableitungen : immer nur eine aktuelle Variable

Integration wie im \mathbb{R}^1

Beispiel 1:

$f(x, y) = x \cdot y$ soll über das Rechteck $[0, 2] \times [1, 4]$ integriert werden.

$$\begin{aligned}\int_D f(x, y) d\mathbf{x} &= \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y dx dy \\ &= \int_1^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_1^4 y \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] dy \\ &= \int_1^4 2y dy = 4^2 - 1^2 = 15.\end{aligned}$$

Oben: Reihenfolge der Integration egal

$$\int_D f(x, y) d\mathbf{x} = \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y dx dy = \int_0^2 \int_1^4 x \cdot y dy dx$$

Wie geht das bei anderen Integrationsbereichen? Zum Beispiel

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0 \right\}$$

Ziel: Beschreibe Bereich durch Angabe von obere und untere Schranken von x und y . Zum Beispiel

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

oder

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$$

Im unteren Fall:

$$\int_D f(x, y) d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

ACHTUNG: $\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 f(x, y) dy dx$ ist UNSINN!

Normalbereich im \mathbb{R}^2

$$a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq g(x) \quad \text{bzw.} \quad a \leq y \leq b, \quad h(y) \leq x \leq g(y)$$

Normalbereich im \mathbb{R}^3

$$a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq g(x), \quad \tilde{h}(x, y) \leq z \leq \tilde{g}(x, y) \quad \text{bzw. permutiert}$$

Integration z.B.

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \int_{\tilde{h}(x,y)}^{\tilde{g}(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Beispiel 2: $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$, $D : x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$

Möglich aber Ungünstig wäre : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy dx$$

Zunächst liefern Formelsammlung

oder die Substitution: $y = \sin u$, $dy = \cos(u) du$:

$$\int \sqrt{1-y^2} dy = \int \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du = \int \cos^2(u) du$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos(2u) + 1) du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2u) + u \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(u) \cos(u) + u) = \frac{1}{2} \left(y \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) \text{ und damit}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(y \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin(\sqrt{1-x^2}) dx \quad x = \cos(\varphi)$$

$$= \left[-\frac{1}{6}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^0 \arcsin(\sin \varphi)(-\sin(\varphi)) d\varphi$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^0 \varphi \cdot \sin(\varphi) d\varphi = \dots = \frac{2}{3}$$

Viel besser:

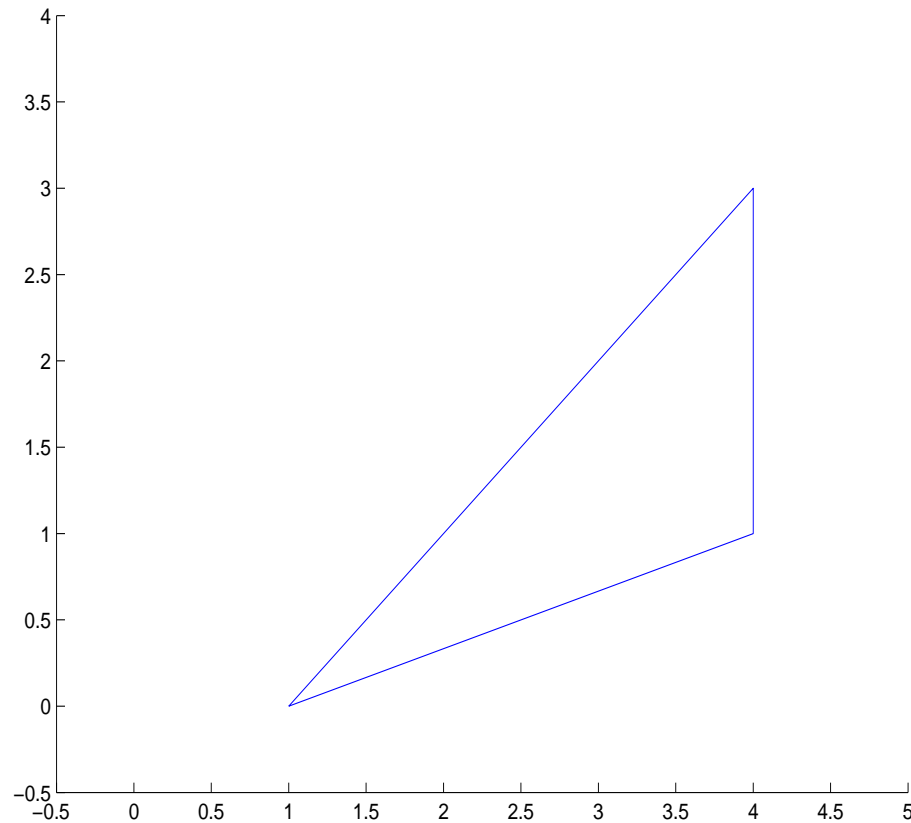
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} [x]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2) dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Faustregel:

Beispiel 3: Berechnen Sie $\int_D (x + 3y + 2) dx$
wobei D das Dreieck mit den Ecken $(1,0)$, $(4,1)$, $(4,3)$ ist.

Lösung:



$$D : x \in [1, 4], \frac{x-1}{3} \leq y \leq x-1$$

$$\begin{aligned}
\int_D (x + 3y + 2) d\mathbf{x} &= \int_1^4 \int_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} (x + 3y + 2) dy dx \\
&= \int_1^4 \left[(x + 2)y + \frac{3}{2}y^2 \right]_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} dx \\
&= \int_1^4 (x + 2)(x - 1) - (x + 2)\left(\frac{x - 1}{3} + \frac{3}{2}(x - 1)^2 - \frac{3(x - 1)^2}{9}\right) dx \\
&= \int_1^4 \frac{2}{3}(x^2 + x - 2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} \cdot (x - 1)^2 dx = \frac{243}{9}
\end{aligned}$$