Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Taylor-Polynome: Fehlerabschätzung
Extrema ohne Nebenbedingungen
Satz über implizite Funktionen

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

für die Klausur DGL I (LUM): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Corona Fälle in Gr 12, Mo 9.45 H0.06
Gr 18, Di 9.45, O-007

Bitte nur frisch getestet an Lehrveranstaltung teilnehmen

Taylor-Polynome

Hier nur: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, also $f : (x,y)^T \mapsto z = f(x,y)$ und im Fall T_m nur für $C^{m+1}-$Funktionen f.

Zur Erinnerung: $T_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$,

$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen $\times$ entsprechender Schrittweiten.

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

Also $T_2 = T_1 + \dfrac{1}{2!}\sum$ 2-te Ableitungen $\times$ entsprechende Schrittweiten.

Analog:

$$\boxed{T_{m+1} = T_m + \frac{1}{(m+1)!}\sum (m+1)-\text{te Ableitungen} \times \text{entsprechende Schrittweiten.}}$$

Mit

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kann man T_2 auch schreiben als:

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left[\overset{1}{\binom{2}{0}}\, f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \right.$$
$$\left. + \overset{2}{\binom{2}{1}}\, f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \overset{1}{\binom{2}{2}}\, f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$

Allgemein:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Definiere **Taylorpolynom** $m-$**ten Grades:** $T_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0)$ zu f mit Entwicklungspunkt
$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^T$:

$$T_0(\boldsymbol{x}) = T_0(x,y) := f(\boldsymbol{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\boxed{T_m(\boldsymbol{x}) = T_{m-1}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0)(x - x_0)^{m-k}(y - y_0)^k}$$

Oben hatten wir T_2. Damit erhalten wir

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x_0,y_0)(x-x_0)^{3-k}(y-y_0)^k$$

$$= T_2(x,y) + \frac{1}{3!}\Bigg[\overset{1}{\binom{3}{0}} f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \overset{3}{\binom{3}{1}} f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)$$

$$\overset{3}{\binom{3}{2}} f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \overset{1}{\binom{3}{3}} f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\Bigg]$$

f_x
- f_{xx}
  - f_{xxx}
  - f_{xxy}
- f_{xy}
  - f_{xyx}
  - f_{xyy}

f_y
- f_{yx}
  - f_{yxx}
  - f_{yxy}
- f_{yy}
  - f_{yyx}
  - f_{yyy}

2 $\quad$ 2^2 zweite Ableitungen $\quad$ 2^3 dritte Ableitungen

Fehlerabschätzung:

Wie oben: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex,
$\boldsymbol{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$

$$T_{m+1}(x) = T_m(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0)(x - x_0)^{m+1}$$

Entwicklungspunkt

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}\underbrace{(x_0 + \theta(x - x_0))}_{x_\theta \ \text{Zwischenstelle}}(x - x_0)^{m+1}$$

Analog im $\mathbb{R}^n$:

Taylorpolynom:

$$T_0(\boldsymbol{x}) = T_0(x,y) := f(\boldsymbol{x}_0) = f(x_0,y_0)$$

$$T_m(\boldsymbol{x}) = T_{m-1}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x_0,y_0)(x-x_0)^{m-k}(y-y_0)^k$$

$$T_{m+1}(\boldsymbol{x}) =$$

$$T_m(\boldsymbol{x}) + \boxed{\frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(\underbrace{x_0,y_0}_{\text{Entwicklungspunkt}})(x-x_0)^{m+1-k}(y-y_0)^k}$$

Restterm / Fehler:

$$R_m(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - T_m(\boldsymbol{x})$$

$$= \boxed{\frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(\underbrace{\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}_{\vec{x}_\theta \text{ Zwischenstelle}})(x-x_0)^{m+1-k}(y-y_0)^k}$$

mit einem $\theta \in [0,1]$.

Beispiel A: Gesucht Taylorpolynome $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ zweiten Grades und $T_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ dritten Grades, für die Funktion

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) \text{ zum Entwicklungspunkt } \boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$$

sowie Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Lösung: $\qquad f(0,0) = 0$

$$f_x = ye^{x-y} + \cos(x+y) \qquad f_x(0,0) = 1$$

$$\begin{aligned} f_y &= e^{x-y} - ye^{x-y} + \cos(x+y) \\ &= (1-y)e^{x-y} + \cos(x+y) \qquad f_y(0,0) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= ye^{x-y} - \sin(x+y) & f_{xx}(0,0) &= 0 \\ f_{xy} &= (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) & f_{xy}(0,0) &= 1 \\ f_{yy} &= (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y) & f_{yy}(0,0) &= -2 \end{aligned}$$

$$T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \overset{1}{\binom{1}{0}} \underbrace{f_x(0,0)}_{1}(x-0) + \overset{1}{\binom{1}{1}} \underbrace{f_y(0,0)}_{2}(y-0)$$

$$\frac{1}{2!}\left[\overset{1}{\binom{2}{0}} \underbrace{f_{xx}(0,0)}_{0}(x-0)^2 + \overset{2}{\binom{2}{1}} \underbrace{f_{xy}(0,0)}_{1}(x-0)(y-0) + \overset{1}{\binom{2}{2}} \underbrace{f_{yy}(0,0)}_{\underline{\underline{-2}}}(y-0)^2\right]$$

$$= x + 2y + xy - y^2$$

Für T_3 zusätzlich benötigt: alle dritten Ableitungen. Wir haben

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y), \qquad f_{xy} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) \text{ und}$$
$$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y)$$

$0 \cdot e^{0-0} - \cos(0) = 0 \cdot 1 - 1 = -1$

$$f_{xxx} = ye^{x-y} - \cos(x+y) \qquad f_{xxx}(0,0) = -1$$
$$f_{xxy} = (1-y)e^{x-y} - \cos(x+y) \qquad f_{xxy}(0,0) = 0$$
$$f_{yyx} = \underbrace{(y-2)}_{-2}\underbrace{e^{x-y}}_{1} - \underbrace{\cos(x+y)}_{1} \qquad f_{yyx}(0,0) = -3$$
$$f_{yyy} = (-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y) \qquad f_{yyy}(0,0) = 2$$

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) +$$
$$\frac{1}{3!}\Big[\binom{3}{0}\underbrace{f_{xxx}(x_0,y_0)}_{-1}(x-x_0)^3 + \binom{3}{1}\underbrace{f_{xxy}(x_0,y_0)}_{0}(x-x_0)^2(y-y_0)$$
$$\binom{3}{2}\underbrace{f_{xyy}(x_0,y_0)}_{-3}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3}\underbrace{f_{yyy}(x_0,y_0)}_{2}(y-y_0)^3\Big]$$
$$= x + 2y + xy - y^2 + \frac{-1}{6}x^3 - \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$$

Fehlerabschätzung

$$f(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}_0) + R_2(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}_0)\,.$$

$$\left|R_2(\boldsymbol{x})\right| = \left|\frac{1}{3!}\right| \left|\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x - x_0)^{3-k}(y - y_0)^k\right| \leq ?$$

Sieht kompliziert aus! Einfacher aber auch grober: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dreiecksungleichung: $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

$$|R_2(x)| = \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^{3} \left|\binom{3}{k}\right| \cdot \left| \underbrace{\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\vec{x}_\theta) \cdot (x-x_0)^{3-k} (y-y_0)^k}_{\leq M \leftarrow \text{finde}} \right|$$

$$|R_2(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{3!} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\right)}_{} \cdot \max_k \underbrace{\left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_\theta)(x - x_0)^{3-k}(y - y_0)^k \right| \right\}}_{\leq M}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}}_{} = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 1^k 1^{3-k} = (1+1)^3 = 2^3$$

Allgemein: n = Dimension des Raumes $\Longrightarrow\ \exists\, n^{m+1}$ "verschiedene" $(m+1)-$te Ableitungen

$$|R_2(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{3!}\cdot 2^3 \cdot \max_{0\leq k\leq 3}\left\{\left|\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(x-x_0)^{3-k}(y-y_0)^k\right|\right\}$$

$$\underbrace{|(x-x_0)^{3-k}(y-y_0)^k|}_{3 \text{ Klammern}} \leq \left(\max\left(|x-x_0|,\ |y-y_0|\right)\right)^3 = \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\|_\infty^3$$

$$= \|\vec{x}-\vec{x}_0\|_\infty^3$$

$$\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)):$$

Finde C := gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung 3 in **allen** Punkten $\boldsymbol{x}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$, $\quad \theta\in[0,1]$

Dann gilt im $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{|R_2(x;x_0)| \leq \frac{2^3}{3!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^3\cdot C}$$

Allgemeiner Fall:

$$\boxed{|R_m(x;x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1}C}$$

n: Dimension des Raumes

m: Grad des Taylorpolynoms

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ in **allen** Punkten $\boldsymbol{x}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in [0,1]$

Beachte: Fehlerabschätzung (fast) immer nur lokal möglich!

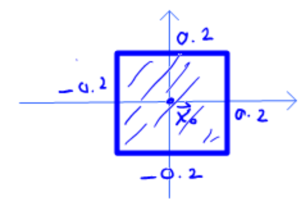
Fehler R_2 für unser Beispiel:

Wir hatten Taylorpolynom $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0) = x + 2y + xy - y^2$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x + y) + ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^T$. Gesucht: eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Allgemeine Formel



$$\boxed{|R_m(x; x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C}$$

$m =$ Grad des Polynoms $= 2$ $\qquad$ $n =$ Dimension des Raumes $= 2$

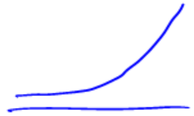
$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} = \Big(\max(|x-0|, |y-0|) \Big)^{\overset{2}{m+1}} = \left(\frac{2}{10}\right)^3$$

weil $|x| < 0.2$ und $|y| < 0.2$

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ zwischen $(x_0, y_0)^T$ und $(x, y)^T$

$-0,2 \le x \le 0.2$

$'' \le y \le ''$



Hier:

$|f_{xxx}| = |ye^{x-y} - \cos(x+y)| \le |ye^{x-y}| + \underbrace{|\cos(x+y)|}_{\le 1} \le |y|\cdot|e^{x-y}| + 1 \le 0.2e^{0.4} + 1$

$|f_{xxy}| = |(1-y)e^{x-y} - \cos(x+y)| \le |(1-y)e^{x-y}| + |\cos(\dots)| \le |1-y|e^{x-y} + 1$

$\le (1-(-0.2))\, e^{0.2-(-0.2)} + 1 = 1.2\,e^{0.4} + 1$

$|f_{xyy}| = |(y-2)e^{x-y} - \cos(x+y)| \le |(y-2)e^{x-y}| + |\cos(x+y)| \le |y-2|e^{x-y} + 1$

$\le |-0.2-2|\, e^{0.2-(-0.2)} + 1 = 2.2e^{0.4} + 1$

$|f_{yyy}| = |(\underbrace{-y+2+1}_{3.2})e^{x-y} - \cos(x+y)| \overset{\text{analog}}{\le} |-y+2+1|\, e^{x-y} + 1 \le |-(-0.2)+3|e^{0.4} + 1$

$= 3.2e^{0.4} + 1$

Maximaler Betrag der dritten Ableitungen $\le$ $3.2e^{0.4} + 1 \le 3.2\, e^{0.5} + 1$

$= (3.2)\cdot\sqrt{e} + 1 \le (3.2)\cdot\sqrt{4} + 1 = 6.4 + 1 = \underline{7.4}$

Und mit $|R_m(x;x_0)| \le \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C$

$|R_2(x,\binom{0}{0})| \le \frac{\cancel{2^3}\; 4}{\cancel{3!}\; 3} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3 \cdot (7.4) < \frac{4}{3}\cdot\frac{8}{1000}\cdot 8 = \frac{4\cdot 64}{3000} = \frac{256}{3000}$

$< \frac{300}{3000} = \frac{1}{10}$

$$|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)| \;\leq\; \frac{2^3}{3!}.C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \leq$$

Beispiel B:

$$g(x,y) = \underbrace{ye^{x-y} + \sin(x+y)}_{f(x,y)\ \text{von oben}} + \underbrace{2x^2 - 3x + 4y}_{\in \Pi_2}.$$

wird exakt wiedergegeben

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von g zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.2, 0.2] \times [-0.2,\ 0.2]$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{1}{10}\,.$$

$$g(x,y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) + \underline{2x^2 - 3x + 4y}.$$

muss nicht entwickelt werden

$$f(x,y) = ye^{x-y} + \sin(x+y)$$

$$\boldsymbol{e}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}, \qquad \sin(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x,y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) =$$

$$= \underline{y}\left(\underline{1} + \underline{\frac{(x-y)}{1!}} + \frac{(x-y)^2}{2!} + \cdots\right) + \frac{(x+y)^1}{1} - \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots$$

$$T_{2,f}(x,y) = y + xy - y^2 + x + y = x + 2y + xy - y^2$$

$$T_{2,g}(x,y) = x + 2y + xy - y^2 + \underbrace{2x^2 - 3x + 4y}_{\text{werden exakt wiedergegeben}}$$

$$= -2x + 6y + 2x^2 + xy - y^2$$

Fehlerabschätzung: $g(x,y) = \underbrace{ye^{x-y}}_{h(x,y)} + \sin(x+y) + \underbrace{2x^2 - 3x + 4y}_{0}$

$\pm\cos(\dots)$

$|3\text{-te Ableitung}|$

$\leq |3\text{-te Ableitung von } h| + 1$

Betrag aller dritten Ableitungen von $g \leq$?

$$h(x,y) = h_x(x,y) = h_{xx}(x,y) = h_{xxx}(x,y) = ye^{x-y}$$

$$h_y(x,y) = h_{xy}(x,y) = h_{xxy}(x,y) = e^{x-y} - ye^{x-y} = (1-y)e^{x-y}$$

$$h_{yy}(x,y) = h_{xyy}(x,y) = -e^{x-y} + (1-y)e^{x-y}(-1) = (-2+y)e^{x-y}$$

$$h_{yyy}(x,y) = e^{x-y} + (-2+y)e^{x-y}(-1) = (-y+3)e^{x-y}$$

Rest wie in Bsp A

$$|g(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C = \frac{2^3}{3!}.\underset{7.4}{C}\underset{\left(\frac{2}{10}\right)^3}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3} \leq$$

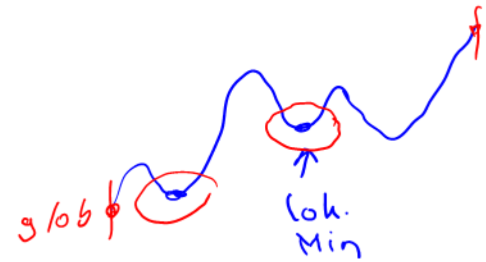
Extrema ohne Nebenbedingungen:

Extrema : Sammelbegiff für Minima und Maxima

$$D \subset \mathbb{R}^n,\ f : D \to \mathbb{R}$$

Lokales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$: es gibt Umgebung U von $\boldsymbol{x}_0$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in U$$
$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in U$$



Globales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$:

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$$
$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$$

Existenz von globalem Minimum und Maximum gesichert, fall D kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und f stetig!

Striktes Maximum/Minimum, wenn oben $\leq$ bzw. $\geq$ durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMA IN D°

$$\boxed{\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) = 0}$$

Im $\mathbb{R}^1$: $f'(x_0) = 0$.

Wird sofort klar mit:

grad $f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \boldsymbol{v}$ mit $< \mathrm{grad}\ f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} >> 0$

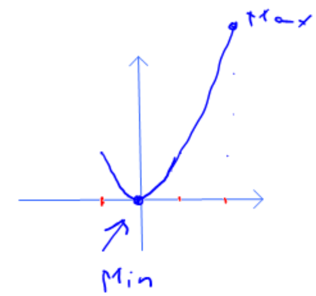
$\boldsymbol{v}$ ist Aufstiegsrichtung! Kein Max in $\boldsymbol{x}_0$

$< \mathrm{grad}\ f(\boldsymbol{x}_0), -\boldsymbol{v} >< 0$

$-\boldsymbol{v}$ ist Abstiegsrichtung! Kein Min in $\boldsymbol{x}_0$

Achtung: Randpunkte gesondert betrachten! (wie im $\mathbb{R}^1$)

Beispiel:



$$f(x) = x^2,\ D = [-1,\, 2],\ f'(x) = 0 \implies x = 0$$

Minimum in Null. Intervall kompakt. Wo bleibt das Maximum?

Analoges gilt im Fall $D \subset \mathbb{R}^n$; $n > 1$.

stationäre Punkte: Punkte mit grad $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$

Im eindimensionalen:

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$: Maximum, $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$: Minimum

Im mehrdimensionalen:

Typ des stationären Punktes (Maximum/Minimum/ Sattelpunkt): abhängig von den Vorzeichen der Eigenwerte der Hessematrix $Hf(x_0,\, y_0)$

Denn im stationären Punkt gilt $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und

$$f(\boldsymbol{x}_0 \pm h\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \underbrace{< \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} >}_{0} + \frac{1}{2} h\, \boldsymbol{v}^T H f(\boldsymbol{x}_0 \pm \theta h\boldsymbol{v}) h\boldsymbol{v}$$

EW'e von $H f(\boldsymbol{x}_0)$	Typ
Alle EW'e > 0	Minimum
Alle EW'e < 0	Maximum
Alle EW'e ≥ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Minimum oder Sattel
Alle EW'e ≤ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Maximum oder Sattel
$\exists \lambda_j < 0 \wedge \exists \lambda_k > 0$	Sattelpunkt
Alle EW'e $= 0$	keine Klassifikation mit dieser Methode möglich

Beispiel C)

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{grad } f(x,y) = (\underbrace{2x + y - 2}_{f_x},\ \underbrace{2y + x + 3}_{f_y})^{\cancel{T}}$$

$$\text{grad } f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases} \iff$$

linear

$y = 2 - 2x$

$4 - 4x + x + 3 = 0 \to \frac{7}{3} = x$

$y = -8/3$

Kandidat(en) für ein Extremum (Extrema):

$$P = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det Hf(P) = 4 - 1 = 3 > 0 \\ Hf_{11}(P) = 2 > 0 \end{cases}$$

$Hf(P)$ ist positiv definit

Minimum in P

Alternativ: Eigenwerte

$$\det\left(Hf(x_0,y_0)-\lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$(2-\lambda)^2 = 1 \longrightarrow 2-\lambda = \pm 1$

$\lambda_1 = 2-1 > 0 \qquad \lambda_2 = 2+1 > 0$

$\longrightarrow$ Minimum in P

Alternativ: Gerschgorin

Beispiel D) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = y^2\,x^3 \;-\; 3y^2\,x \;+\; 12y\,.$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 3y^2 = 0 \iff 3y^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow y=0 \lor x^2-1=0$$

$$\iff \boxed{y=0 \lor x=-1 \lor x=1}$$

$$f_y(x,y) = 2yx^3 - 6xy + 12 \overset{!}{=} 0$$

Fall $y=0$ $\qquad f_y(x,0) = 12 \neq 0$

Fall $x=-1$ $\qquad f_y(-1,y) = -2y + 6y + 12 = 0 \to \boxed{y=-3} \qquad P_1 = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

Fall $x=1$ $\qquad f_y(1,y) = 2y - 6y + 12 = 0 \to \boxed{y=3} \qquad P_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Zur Klassifikation bestimmt man die Hessematrizen in den stationären Punkten P_1 und P_2.

Wir haben $\quad f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 3y^2, \quad f_y(x,y) = 2yx^3 - 6xy + 12.$ Also

$$Hf(x,y) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_{xx} & \qquad f_{xy} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6yx^2 - 6y \\ 6yx^2 - 6y & 2x^3 - 6x \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\overset{P_2}{Hf(1,3)} = \begin{pmatrix} 54 & 6\cdot 3 - 6\cdot 3 \\ 6.3 - 6.3 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 > 0$

$\lambda_2 < 0$

$\longrightarrow$ Sattelpunkt in P_2

$$Hf(-1,-3) = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ ebenfalls Sattelpunkt

Satz über implizite Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $\boldsymbol{g}$ sei C^k Funktion, $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} g_1(x_1 \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1 \dots x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad m \text{ Gleichungen}$$

Gesucht : Lösungen von $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$

m Gleichungen, n Unbekannte. Mehr Variablen als Gleichungen.

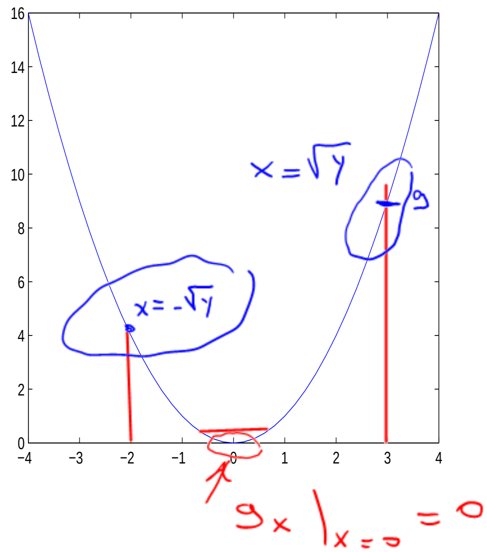
Frage: kann man die eine oder andere Variable eliminieren? Wenn ja, welche?

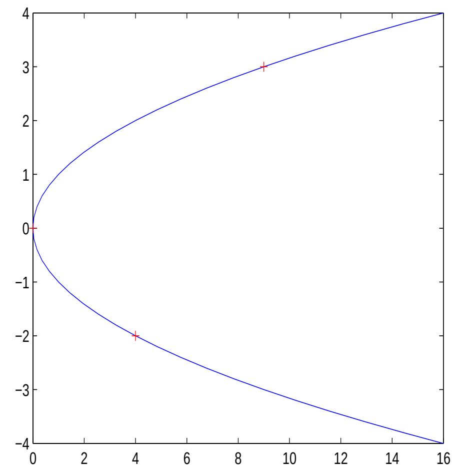
Einfaches Beispiel 1: $g(x, y) = x^2 - y = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$y = x^2 = f(x)$

Eindeutige Auflösung nach x global nicht möglich.

Was passiert lokal? Also in einzelnen Punkten.





$g(x) = x^2 - y$

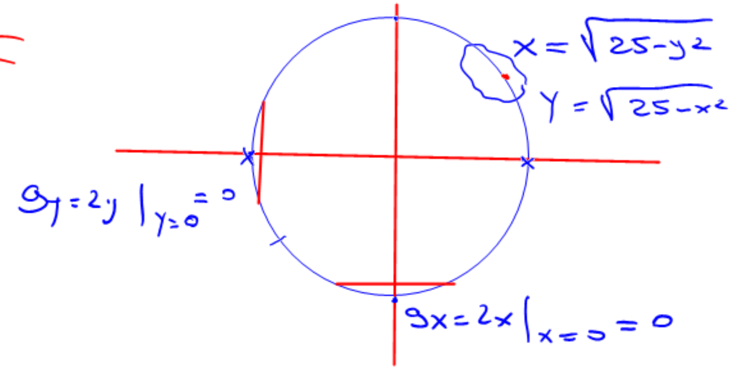
$g_x = 2x$

$(x_0, y_0)^T := (3, 9)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = f(y) := \sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (-2, 4)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = f(y) := -\sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (0, 0)^T$: In der Nähe dieses Punktes ist
keine eindeutige Auflösbarkeit gegeben! Hier ist $g_x = 2x|_{x=0}$

Noch ein Beispiel: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5 um Null.



Global kann man keine Variable eliminieren.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$ oder auch $y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt

$y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$
Eine Auflösung nach x ist nicht möglich. Hier ist wieder $g_x = 2x = 0$.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$
Eine Auflösung nach y ist nicht möglich. Hier ist $g_y = 2y = 0$.

Auskunft über den allgemeinen Fall gibt der

SATZ: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $\boldsymbol{g}$ sei C^k Funktion, $k \geq 1$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

Nach welchen m Variablen kann ich in der Nähe eines Lösungspunktes auflösen?
Nenne Variablen nach denen aufgelöst werden soll $y_1, y_2, \dots, y_m$ und die anderen Variablen $x_1, \dots, x_{n-k}$

Sei $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} \in D$ mit $g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$ und

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{y}} := \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_m} \end{pmatrix}$$ regulär im Punkt $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$.

$$\Longrightarrow \quad \exists \text{ lokal genau ein } \boldsymbol{f} \text{ mit } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ und } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

g ist nach den Variablen y auflösbar!

$\boldsymbol{f}$ ist C^k–Funktion mit $\boxed{\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\Big(\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).}$

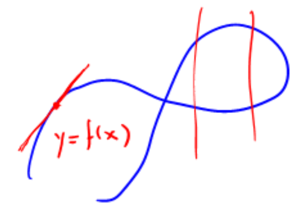
Für $x, y \in \mathbb{R}^1$: $\quad f'(x) = -(g_y)^{-1} g_x = -\frac{g_x}{g_y}$

Beispiel 1: Gegeben sei $\quad g(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0.$

Ist $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (1,1)^T$ nach y auflösbar?

Das heißt: gibt es eine Funktion $f(x)$ mit $f(1) = 1$, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,.$$



Antwort: Ja, denn es gilt

$$g_y(x,y) = 4x^2 + 24x^4y^2 \quad \Longrightarrow \quad g_y(1,1) = 4 + 24 \neq 0\,.$$

Hier allerdings keine explizite Formel wie in den Eingangsbeispielen!

Man kann aber lokal die Funktion g durch Taylor-Polynome nähern. Der Satz besagt:

$g_x(x,y) = 8xy + 32x^3y^3$

$$f'(x) = y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

$y'(1) = -\dfrac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)} = \dfrac{40}{28} = \dfrac{10}{7}$

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = y(1) + y'(1)(x-1)$$

$T_1(x) = 1 + \frac{10}{7}(x-1)$

Beispiel 2: Durch die einzelne Gleichung

$x + 2y + 3z - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

$$g(x,y,z) = xy\sin(z) - (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

ist **implizit** eine **Fläche** definiert.

Offensichtlich: $g(1,1,0) = 0$

$$g_x(x,y,z) = y\sin(\overset{0}{z}) - 2(\overset{1}{x} - 1) \qquad g_y(x,y,z) = x\sin(\underset{0}{z}) + 2(\overset{1}{y} - 1)$$

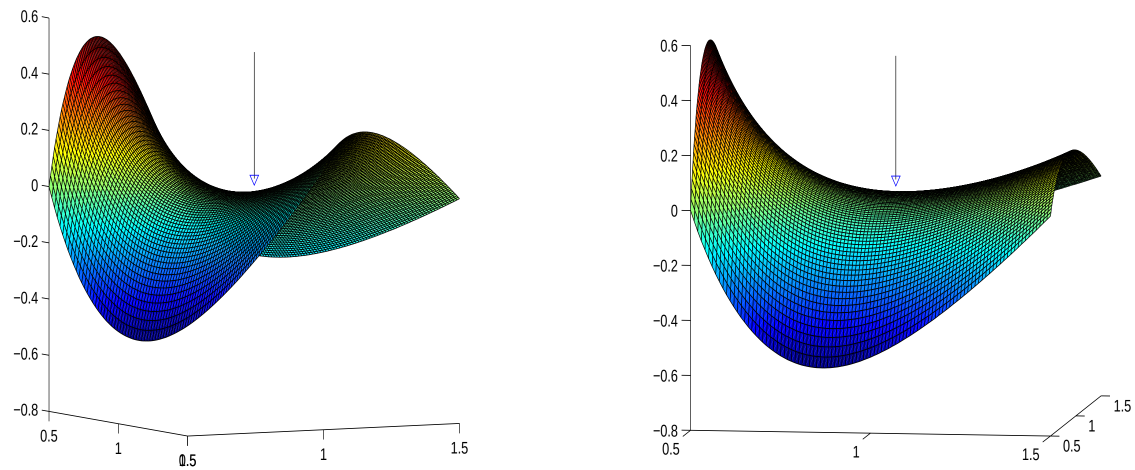
$$g_z(x,y,z) = \underset{1\cdot 1\cdot\cos(0)}{xy\cos(z)}$$

$g_x(1,1,0) = 1.0 - 0 = 0$ $\qquad g_y(1,1,0) = 0$ $\qquad g_z(1,1,0) = 1$

nach dem Satz kann im Lösungspunkt $(1,1,0)$ nach z aufgelöst werden.

$g_x(1,1,0) = g_y(1,1,,0) = 0$: Der Satz garantiert also keine Auflösbarkeit nach x oder y. Er schließt aber auch nichts aus! Warum?

Bei expliziter Auflösbarkeit nach z erhält man eine **explizite** Darstellung der Fläche: $(x, y, z(x, y))$



hier $z = \arcsin\left(\frac{(x-1)^2-(y-1)^2}{xy}\right)$ in einer Umgebung von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$