

Hörsaalübung 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

Taylor-Polynome: Fehlerabschätzung

Extrema ohne Nebenbedingungen

Satz über implizite Funktionen

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

für die Klausur DGL I (LUM): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Taylor-Polynome

Hier nur: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, also $f : (x, y)^T \mapsto z = f(x, y)$
und im Fall T_m nur für C^{m+1} -Funktionen f .

Zur Erinnerung: $T_0 = f(\mathbf{x}_0)$,

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen \times entsprechender Schrittweiten.

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ + \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(y - y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

Also $T_2 = T_1 + \frac{1}{2!} \sum$ 2-te Ableitungen \times entsprechende Schrittweiten.

Analog:

$$T_{m+1} = T_m + \frac{1}{(m+1)!} \sum (m+1)\text{-te Ableitungen} \times \text{entsprechende Schrittweiten.}$$

Mit

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

kann man T_2 auch schreiben als:

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \left[\binom{2}{0} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \binom{2}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

Allgemein:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex, $\mathbf{x}_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Definiere **Taylorpolynom m -ten Grades:** $T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ zu f mit Entwicklungspunkt

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T :$$

$$T_0(\mathbf{x}) = T_0(x, y) := f(\mathbf{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$T_m(\mathbf{x}) = T_{m-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{m-k} (y - y_0)^k$$

Oben hatten wir T_2 . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= T_2(x, y) + \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \\ &= T_2(x, y) + \frac{1}{3!} \left[\binom{3}{0} f_{xxx}(x_0, y_0) (x - x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 (y - y_0) \right. \\ &\quad \left. \binom{3}{2} f_{xyy}(x_0, y_0) (x - x_0) (y - y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}(x_0, y_0) (y - y_0)^3 \right] \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung:

Wie oben: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex,
 $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{m+1} Funktion

Zur Erinnerung: im \mathbb{R}^1

$$T_{m+1}(x) = T_m(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0)(x - x_0)^{m+1}$$

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{m+1}$$

Analog im \mathbb{R}^n :

Taylorpolynom:

$$T_0(\mathbf{x}) = T_0(x, y) := f(\mathbf{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$T_m(\mathbf{x}) = T_{m-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{m-k} (y - y_0)^k$$

$$T_{m+1}(\mathbf{x}) =$$

$$T_m(\mathbf{x}) + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{m+1-k} (y - y_0)^k$$

Restterm / Fehler:

$$R_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x - x_0)^{m+1-k} (y - y_0)^k$$

mit einem $\theta \in [0, 1]$.

Beispiel A: Gesucht Taylorpolynome $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ zweiten Grades und $T_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ dritten Grades, für die Funktion

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y) \text{ zum Entwicklungspunkt } \mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$$

sowie Abschätzung für das Restglied $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Lösung:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f_x = ye^{x-y} + \cos(x + y)$$

$$f_x(0, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} f_y &= e^{x-y} - ye^{x-y} + \cos(x + y) \\ &= (1 - y)e^{x-y} + \cos(x + y) \end{aligned}$$

$$f_y(0, 0) = 2$$

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x + y)$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy} = (1 - y)e^{x-y} - \sin(x + y)$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1$$

$$f_{yy} = (y - 2)e^{x-y} - \sin(x + y)$$

$$f_{yy}(0, 0) = -2$$

$$T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = f(0, 0) + \binom{1}{0} f_x(0, 0)(x - 0) + \binom{1}{1} f_y(0, 0)(y - 0)$$

$$\frac{1}{2!} \left[\binom{2}{0} f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 + \binom{2}{1} f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) + \binom{2}{2} f_{yy}(0, 0)(y - 0)^2 \right]$$

=

Für T_3 zusätzlich benötigt: alle dritten Ableitungen. Wir haben

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y), \quad f_{xy} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) \text{ und}$$

$$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y)$$

$$f_{xx} = \qquad \qquad \qquad f_{xx}(0,0) =$$

$$f_{xx} = \qquad \qquad \qquad f_{xx}(0,0) =$$

$$f_{yy} = \qquad \qquad \qquad f_{yy}(0,0) =$$

$$f_{yy} = (-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y) \qquad \qquad f_{yy}(0,0) =$$

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) +$$

$$\frac{1}{3!} \left[\binom{3}{0} f_{xxx}(x_0, y_0)(x-x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}(x_0, y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) \right. \\ \left. \binom{3}{2} f_{xyy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}(x_0, y_0)(y-y_0)^3 \right]$$

$$= x + 2y + xy - y^2 + \dots$$

Fehlerabschätzung

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0).$$

$$R_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k$$

Sieht kompliziert aus! Einfacher aber auch grober:

Dreiecksungleichung:

$$|R_2(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{3!} \left(\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \right) \max_k \left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_\theta) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \right| \right\}$$

$$\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k 1^{3-k}$$

Allgemein: $n = \text{Dimension des Raumes} \implies \exists n^{m+1}$ "verschiedene,, $(m+1)$ -te Ableitungen

$$|R_2(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{3!} \cdot 2^3 \cdot \max_{0 \leq k \leq 3} \left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \right| \right\}$$

$$|(x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k|$$

$$\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)):$$

Finde $C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung 3 in **allen** Punkten $\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\theta \in [0, 1]$

Dann gilt im \mathbb{R}^2 :

$$|R_2(x; x_0)| \leq \frac{2^3}{3!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \cdot C$$

Allgemeiner Fall:

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

n : Dimension des Raumes

m : Grad des Taylorpolynoms

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ in **allen** Punkten $\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\theta \in [0, 1]$

Beachte: Fehlerabschätzung (fast) immer nur lokal möglich!

Fehler R_2 für unser Beispiel:

Wir hatten Taylorpolynom $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = x + 2y + xy - y^2$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x + y) + ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$. Gesucht: eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Allgemeine Formel

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

$m =$ Grad des Polynoms $=$

$n =$ Dimension des Raumes $=$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} =$$

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ zwischen $(x_0, y_0)^T$ und $(x, y)^T$

Hier:

$$|f_{xxx}| = |ye^{x-y} - \cos(x+y)| \leq$$

$$|f_{xxy}| = |(1-y)e^{x-y} - \cos(x+y)| \leq$$

$$|f_{xyy}| = |(y-2)e^{x-y} - \cos(x+y)| \leq$$

$$|f_{yyy}| = |(-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y)| \leq$$

Maximaler Betrag der dritten Ableitungen \leq

$$\text{Und mit } |R_m(x; x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

$$|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \leq$$

Beispiel B:

$$g(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y) + 2x^2 - 3x + 4y.$$

- a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von g zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{1}{10}.$$

$$g(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y) + 2x^2 - 3x + 4y.$$

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y)$$

$$e^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}, \quad \sin(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y) =$$

Fehlerabschätzung: $g(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x + y) + 2x^2 - 3x + 4y$

Betrag aller dritten Ableitungen von $g \leq ?$

$$h(x, y) = h_x(x, y) = h_{xx}(x, y) = h_{xxx}(x, y) = ye^{x-y}$$

$$h_y(x, y) = h_{xy}(x, y) = h_{xxy}(x, y) =$$

$$h_{yy}(x, y) = h_{xyy}(x, y) =$$

$$h_{yyy}(x, y) =$$

$$|g(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C = \frac{2^3}{3!} \cdot C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \leq$$

Extrema ohne Nebenbedingungen:

Extrema : Sammelbegriff für Minima und Maxima

$$D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Lokales Minimum bzw. Maximum in \mathbf{x}_0 : es gibt Umgebung U von \mathbf{x}_0 mit

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

Globales Minimum bzw. Maximum in \mathbf{x}_0 :

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

Existenz von globalem Minimum und Maximum gesichert, fall D kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und f stetig!

Striktes Maximum/Minimum, wenn oben \leq bzw. \geq durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMA IN D°

$$\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) = 0$$

Im \mathbb{R}^1 : $f'(x_0) = 0$.

Wird sofort klar mit:

$$\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0 \implies \exists \boldsymbol{v} \text{ mit } \langle \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} \rangle > 0$$

\boldsymbol{v} ist Aufstiegsrichtung! Kein Max in \boldsymbol{x}_0

$$\langle \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0), -\boldsymbol{v} \rangle < 0$$

$-\boldsymbol{v}$ ist Abstiegsrichtung! Kein Min in \boldsymbol{x}_0

Achtung: Randpunkte gesondert betrachten! (wie im \mathbb{R}^1)

Beispiel:

$$f(x) = x^2, D = [-1, 2], f'(x) = 0 \implies x = 0$$

Minimum in Null. Intervall kompakt. Wo bleibt das Maximum?

Analoges gilt im Fall $D \subset \mathbb{R}^n; n > 1$.

stationäre Punkte: Punkte mit $\text{grad } f(x_0) = 0$

Im eindimensionalen:

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$: Maximum, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$: Minimum

Im mehrdimensionalen:

Typ des stationären Punktes (Maximum/Minimum/ Sattelpunkt): abhängig von den Vorzeichen der Eigenwerte der Hessematrix $Hf(x_0, y_0)$

Denn im stationären Punkt gilt $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = 0$ und

$$f(\mathbf{x}_0 \pm h\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \text{grad } f(\mathbf{x}_0), h\mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2}h^2 \mathbf{v}^T H f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} + o(h^2)$$

EW'e von $Hf(\mathbf{x}_0)$	Typ
Alle EW'e > 0	Minimum
Alle EW'e < 0	Maximum
Alle EW'e ≥ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Minimum oder Sattel
Alle EW'e ≤ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Maximum oder Sattel
$\exists \lambda_j < 0 \wedge \exists \lambda_k > 0$	Sattelpunkt
Alle EW'e $= 0$	keine Klassifikation mit dieser Methode möglich

Beispiel C)

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{grad } f(x, y) = (2x + y - 2, 2y + x + 3)^T$$

$$\text{grad } f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases} \iff$$

Kandidat(en) für ein Extremum (Extrema):

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$\implies \begin{cases} \det Hf(P) = \\ Hf_{11}(P) \end{cases} \quad Hf(P) \text{ ist } \dots \text{ definit}$$

Alternativ: Eigenwerte

$$\det(Hf(x_0, y_0) - \lambda E) =$$

Alternativ: Gerschgorin

Beispiel D) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y^2 x^3 - 3y^2 x + 12y.$$

Lösung:

$$f_x(x, y) = 3x^2 y^2 - 3y^2 = 0 \iff$$

$$f_y(x, y) = 2yx^3 - 6xy + 12 \stackrel{!}{=} 0$$

Zur Klassifikation bestimmt man die Hessematrizen in den stationären Punkten P_1 und P_2 .

Wir haben $f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 3y^2$, $f_y(x, y) = 2yx^3 - 6xy + 12$. Also

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6yx^2 - 6y \\ 6yx^2 - 6y & 2x^3 - 6x \end{pmatrix}$$

Satz über implizite Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, g sei C^k Funktion, $k \geq 1$.

Gesucht : Lösungen von $g = 0$

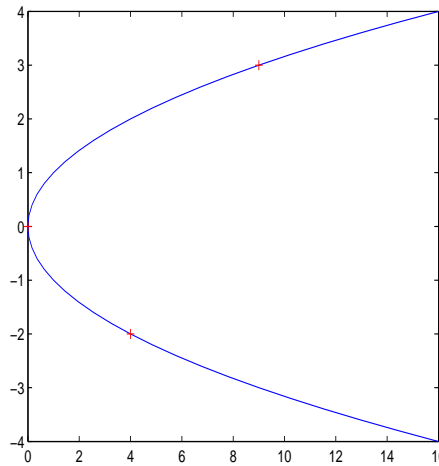
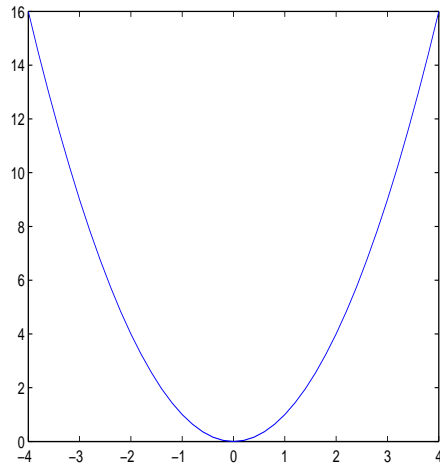
m Gleichungen, n Unbekannte. Mehr Variablen als Gleichungen.

Frage: kann man die eine oder andere Variable eliminieren? Wenn ja, welche?

Einfaches Beispiel 1: $g(x, y) = x^2 - y = 0 \implies x = \pm\sqrt{y}$

Eindeutige Auflösung nach x global nicht möglich.

Was passiert lokal? Also in einzelnen Punkten.



$(x_0, y_0)^T := (3, 9)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
 $x = f(y) := \sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (-2, 4)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
 $x = f(y) := -\sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (0, 0)^T$: In der Nähe dieses Punktes ist
keine eindeutige Auflösbarkeit gegeben! Hier ist $g_x = 2x|_{x=0}$

Noch ein Beispiel: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5 um Null.

Global kann man keine Variable eliminieren.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2} \text{ oder auch } y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$$

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt

$$y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$$

Eine Auflösung nach x ist nicht möglich. Hier ist wieder $g_x = 2x = 0$.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$$

Eine Auflösung nach y ist nicht möglich. Hier ist $g_y = 2y = 0$.

Auskunft über den allgemeinen Fall gibt der

SATZ: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, g sei C^k Funktion, $k \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und

$$Jg_y := \frac{\partial g}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \text{ regulär im Punkt } (x_0, y_0).$$

$\implies \exists$ lokal genau ein f mit $f(x_0) = y_0$, $g(x, y) = 0 \iff y = f(x)$.

g ist nach den Variablen y auflösbar!

f ist C^k -Funktion mit $Jf(x) = - \left(Jg_y(x, y) \right)^{-1} \cdot Jg_x(x, y)$.

Beispiel 1: Gegeben sei $g(x, y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0$.

Ist $g(x, y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (1, 1)^T$ nach y auflösbar?

Das heißt: gibt es eine Funktion $f(x)$ mit $f(1) = 1$, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

Antwort: Ja, denn es gilt

$$g_y(x, y) = 4x^2 + 24x^4y^2 \implies g_y(1, 1) = 4 + 24 \neq 0.$$

Hier allerdings keine explizite Formel wie in den Eingangsbeispielen!

Man kann aber lokal die Funktion g durch Taylor-Polynome nähern. Der Satz besagt:

$$f'(x) = y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = y(1) + y'(1)(x - 1)$$

Beispiel 2: Durch die einzelne Gleichung

$$g(x, y, z) = xy \sin(z) - (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

ist **implizit** eine **Fläche** definiert.

Offensichtlich: $g(1, 1, 0) = 0$

$$g_x(x, y, z) = y \sin(z) - 2(x - 1)$$

$$g_y(x, y, z) = x \sin(z) + 2(y - 1)$$

$$g_z(x, y, z) = xy \cos(z)$$

$$g_x(1, 1, 0) =$$

$$g_y(1, 1, 0) =$$

$$g_z(1, 1, 0) =$$

nach dem Satz kann im Lösungspunkt $(1, 1, 0)$ nach z aufgelöst werden.

$g_x(1, 1, 0) = g_y(1, 1, 0) = 0$: Der Satz garantiert also keine Auflösbarkeit nach x oder y . Er schließt aber auch nichts aus! Warum?

Bei expliziter Auflösbarkeit nach z erhält man eine **explizite** Darstellung der Fläche: $(x, y, z(x, y))$

