Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 3 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Jacobi-Matrizen, Kettenregel, Richtungsableitungen, Vektorfelder, Rotation und Divergenz, Taylor-Polynome, Teil 1

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Bitte bei der Abgabe der Hausaufgaben DGL und Ana III
die Gruppennummer angeben.
Danke!

Jacobi-Matrizen

Sei $\quad f : D \to \mathbb{R}^m , \qquad D \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar $\iff$ Jede Komponente f_i von $\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar. Die Definition der Differenzierbarkeit kann wörtlich übertragen werden.
Im Falle der Existenz definiert man die **Ableitugs-/Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \ldots \\ \operatorname{grad} f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Beispiel A1: (Zu P1)

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ f_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x+3yz \\ y^2+z^2 \\ x^2+2y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) =$$

Im Fall $m = n$: **Funktionaldeterminante von f** := det $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Wichtig bei Koordinatentransformation!

Im obigen Beispiel:

$$|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y,z)| := \det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y,z) = \det$$

Kettenregel: $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}(D) \to \mathbb{R}^k$

$\implies \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^k \wedge$

$$J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,.$$

Wichtiges Beispiel A2: $\frac{d}{dt} s(t, x(t), y(t)) = ?$

Einerseits: $s : \big(t, x, y\big) \mapsto s(t, x, y)$

Andererseits mit $g : t \mapsto \big(t, x(t), y(t)\big)^T$

$f(t) = s \circ g(t) = s(t, x(t), y(t))$

$\frac{d}{dt} s(t, x(t), y(t)) = \frac{d}{dt} f(t) = \boldsymbol{J} s(g(t)) \cdot \boldsymbol{J} g(t)$

$\boldsymbol{J} s(t, x, y) = (s_t, s_x, s_y),$ $\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$

$$\frac{d}{dt} s(t, x(t), y(t)) = (s_t, s_x, s_y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} =$$

Sei zum Beispiel: $s(t,x,y) = tx + t^2x^2y$ und $\quad x(t) = 2t^2,\ y(t) = 1+t$

Definiere: $g(t) \ = \ \big(t, x(t), y(t)\big)^T \ = \ \big(t, 2t^2, 1+t\big)^T$

$$\Longrightarrow \ \boldsymbol{Jg}(t) = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s(t,x,y) = tx + t^2x^2y$

$\frac{\partial}{\partial t} s(t,x,y) \ = \ s_t \ = \ (tx + t^2x^2y)_t =$

$s_x = (tx + t^2x^2y)_x \ =$ $\qquad\qquad$ $s_y = (tx + t^2x^2y)_y \ =$

Und mit $f(t) = s \circ g(t)$:

$f'(t) = J(s \circ g(t)) = Js(t,x,y) \cdot Jg(t) =$

Also $\frac{d}{dt} s(t, x(t), y(t)) = \ s_t + s_x \cdot \dot{x} + s_y \cdot \dot{y}$

Beispiel A3: (Zu P1) Wir hatten in Beispiel A1:

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3yz \\ y^2+z^2 \\ x^2+2y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3z & 3y \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

det $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;=\; -8z + 12x(z^2-y^2)$

Betrachte $\boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2f_1(x,y,z) \\ 3f_2(x,y,z) \\ 4f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

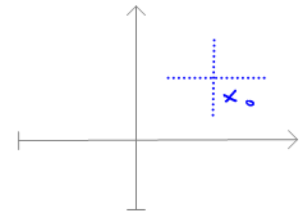
Mit $\boldsymbol{h}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\beta \\ 4\gamma \end{pmatrix}$ und $\qquad \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{h} =$

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) = \boldsymbol{J}(h \circ f(\boldsymbol{x})) =$

det $\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) =$ det

Richtungsableitungen (Zu H1)

Letzte HÜ: Ableitung einer Funktion $D \subset \mathbb{R}^n, \quad f : D \to \mathbb{R}$ in Richtung der 1., 2., 3, ... Koordinate.



Jetzt allgemeiner: Sei $\quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}\| = 1$ und $\boldsymbol{x}_0 \in D$.

Frage: Wie ändert sich der Wert von f, wenn ich von $\boldsymbol{x}_0$ aus ein wenig in Richtung $\boldsymbol{a}$ gehe?

$$f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0) + ? \qquad h \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}_0 + th \cdot \boldsymbol{a} \in D, \forall t \in [0,1]$$

Definiere: Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ bei $\boldsymbol{x}_0$

$=$ Änderungsrate von f in Richtung $\boldsymbol{a}$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}}$$

Ist $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ positiv, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ größer. (Anstiegs- / Aufstiegsrichtung)

Ist $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ negativ, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ kleiner. (Abstiegsrichtung)

Vorlesung: $\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = < \mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0)^T, \boldsymbol{a} >.}$

Beweis: Kettenregel. Siehe Vorlesung:

Setze: $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
und $\qquad z(h) := f(\boldsymbol{g}(h)), \quad z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Dann ist

$$\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} x_{0,1} + ha_1 \\ x_{0,2} + ha_2 \\ \vdots \\ x_{0,n} + ha_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

und im Falle der Existenz nach Kettenregel:

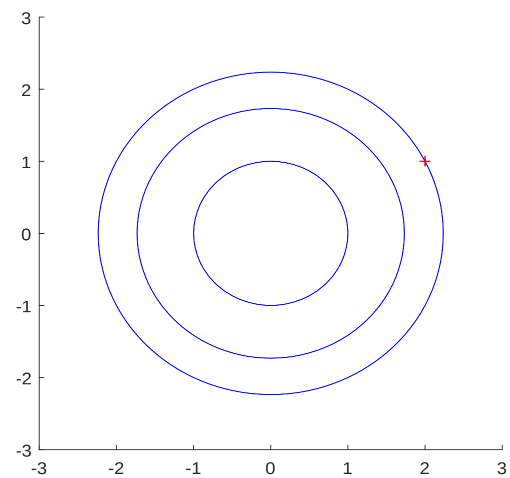
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{d}{dh} f(\boldsymbol{g}(h))|_{h=0} = \boldsymbol{J}(f(\boldsymbol{g}(0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}.}$$

Konkretes Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2, 1)^T$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}$

  $$= (2x, 2y)|_{\boldsymbol{x}_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4, 2) \cdot \binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 6 = 3\sqrt{2}\,.$$



$\boldsymbol{a}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ **lokal** eine Aufstiegsrichtung

- Für $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4,2) \cdot \binom{-1}{1} = -\sqrt{2}.$

  $\boldsymbol{u}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ eine Abstiegsrichtung.

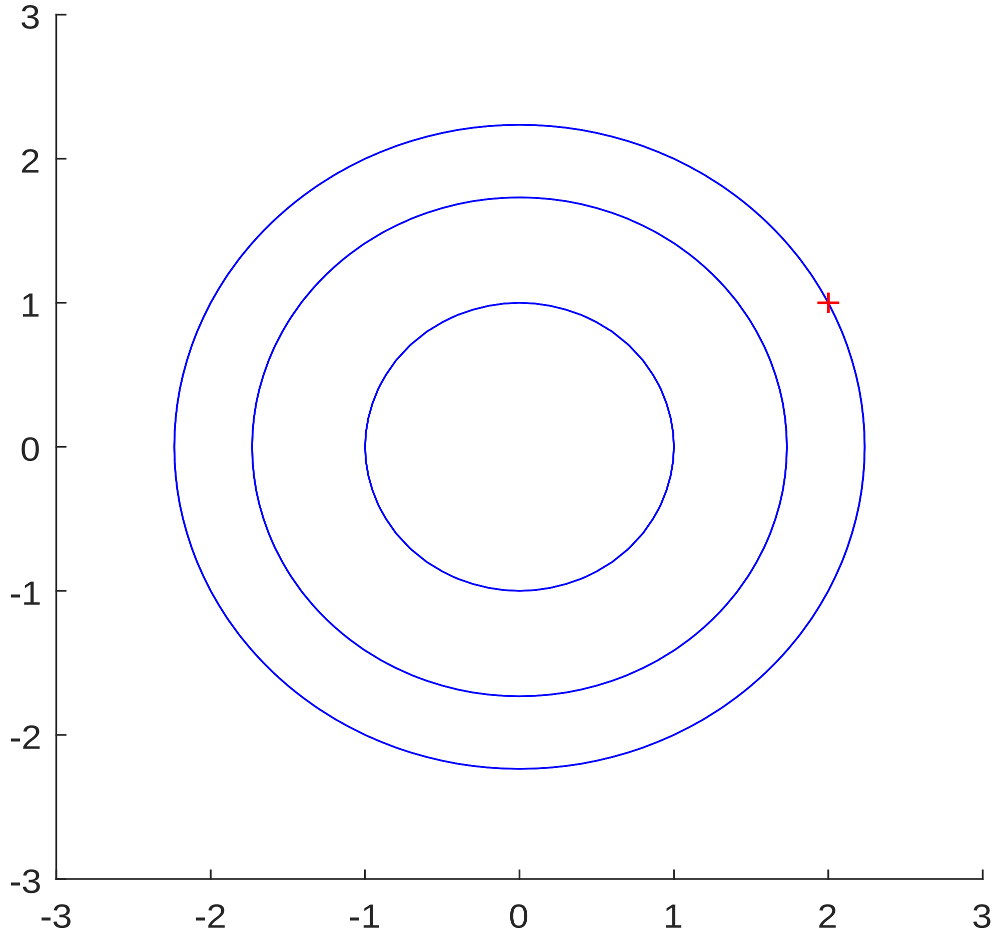
  $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$

  Wert in $\boldsymbol{x}_0$: also $f(2,1) = 5$

  Wert in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + 2\sqrt{2}\boldsymbol{u} =$

  $f(0,3) = 9.$

  Wie geht das denn? $\boldsymbol{u}$ war doch Abstiegsrichtung!


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Niveaumenge/Niveaufläche (Zu H1)

Analog zu Höhenlinien im $\mathbb{R}^2$ definiert man für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ die Niveaumenge/Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ eines Punktes $\boldsymbol{x}_0$ als die Menge der Punkte, die den gleichen Funktionswert haben, wie $\boldsymbol{x}_0$:

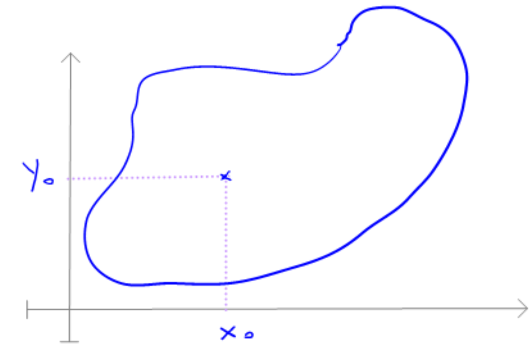
$$N_{\boldsymbol{x}_0} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\right\}$$

Beispiel: $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Niveauflächen: Kugeloberflächen/Sphären um Null

Gleichung für Niveaufläche in $\boldsymbol{x}_0 = (4, 3, 12)$

Vektorfelder (Zu H2)



$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Hier nur $n = 2$ oder $n = 3$.

Beispiel: planare Strömung, Strömung in der Ebene

Betrachte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$. Zu jedem Punkt $\binom{x}{y} \in D$ gibt es einen Geschwindigkeitsvektor $\binom{u(x,y)}{v(x,y)}$, also eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Veranschaulichung: Hefte im Punkt $\binom{x}{y}$ den Vektor $\binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ an.

Es entstehen die sogenannten **Stromlinien**, Lösungen von
$\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$ bzw. Lösungen der Differentialgleichung

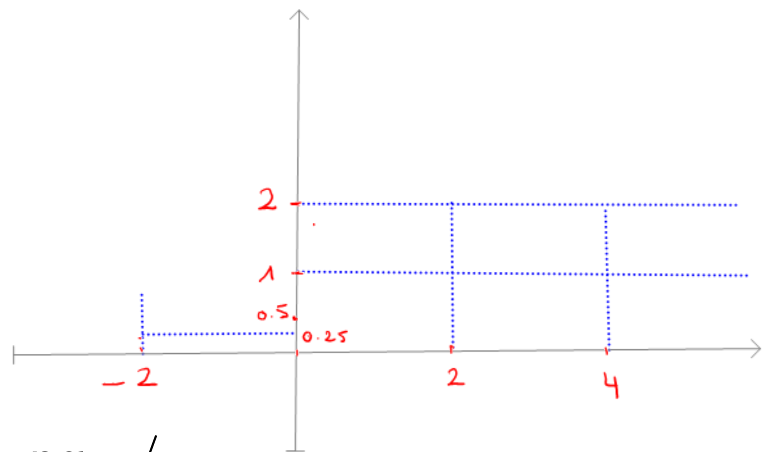
$$y'(x) = v(x,y)/u(x,y).$$

Beispiel: $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{u}(x,y) := \binom{u(x,y)}{v(x,y} = \binom{2}{y}.$

$P_1 = \binom{-2}{0.25} \Longrightarrow \boldsymbol{u}(P_1) = \binom{2}{0.25}$

$P_2 = \binom{0}{0.5} \Longrightarrow \boldsymbol{u}(P_2) = \binom{2}{0.5}$

$P_3 = \binom{2}{1} \Longrightarrow \boldsymbol{u}(P_3) = \binom{2}{1}$



Skizze: vor Ort. Pfeile haben die Steigung v/u.

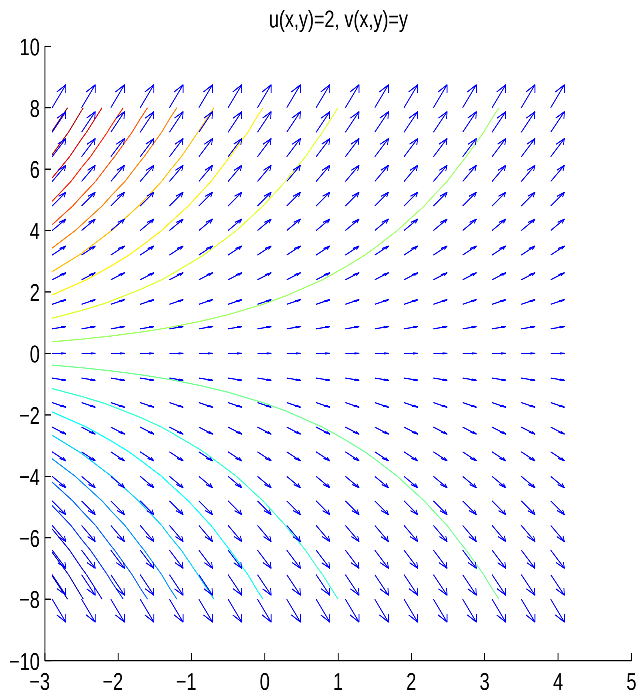
Weg eines Teilchens in der Strömung $= (x, y(x))^T$ mit
$y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$.

Hier $y'(x) = y(x)/2$. Dies ist eine separierbare DGL. Für $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2} \Longrightarrow \ln|y| = \frac{x}{2} + \hat{c} \Longrightarrow y(x) = ce^{\frac{x}{2}}.$$

Befehlsfolge:

```
x=[-2.9 : .4 : 4];
y=[-8 : .8 : 8];
[X,Y] = meshgrid(x,y);
z=Y.*exp(-X./2);
contour(X,Y,z,20)
hold on
m=length(x)
n=length(y)
u=2*ones(n,m);
v=Y;
quiver(X,Y,u,v)
```



Divergenz und Rotation

Gegeben: Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$. D.h.

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n) \\ f_2(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n) \end{pmatrix}$$

Dann definiert man

Divergenz von $\boldsymbol{f}$: $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_n)$

n=2

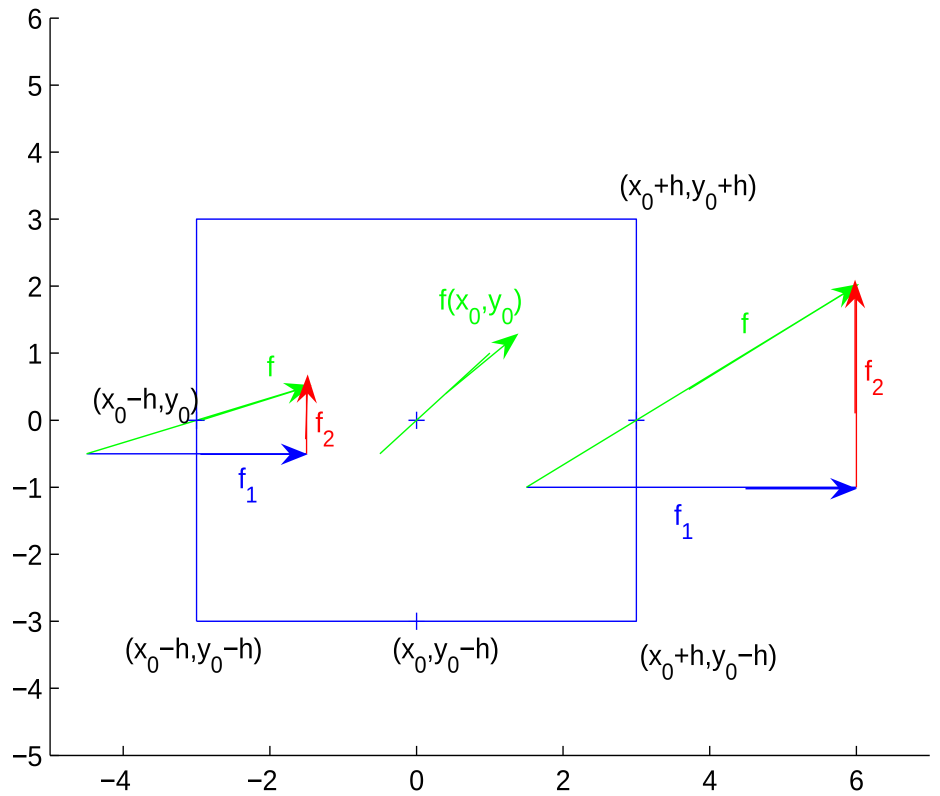
$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,\, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\, y)$$

n=3: $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y,\, z) \\ f_2(x,\, y,\, z) \\ f_3(x,\, y,\, z) \end{pmatrix},$

$$\text{div}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,\, y,\, z)$$

Bei Strömungs- / Flussproblemen: Quelldichte

Veranschaulichung:



Durch linke Kante fließt $\approx \; f_1(x_0 - h, y_0) \cdot 2h$ pro Zeiteinheit

Durch rechte Kante fließt $\approx \; f_1(x_0 + h, y_0) \cdot 2h$ pro Zeiteinheit

Analog unten $\approx\ f_2(x_0, y_0 - h) \cdot 2h$ und oben $\approx\ f_2(x_0, y_0 + h) \cdot 2h$

Aus dem Rechteck fließt pro Zeit- und Volumen(Flächen)einheit ca.

$$\frac{f_1(x_0 + h, y_0) \cdot 2h \ - \ f_1(x_0 - h, y_0) \cdot 2h}{(2h)^2}$$
$$+ \frac{f_2(x_0, y_0 + h) \cdot 2h \ - \ f_2(x_0, y_0 - h) \cdot 2h}{(2h)^2}$$

Für $h \to 0$ ergibt sich die Quelldichte in (x_0, y_0) als

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f_1(x_0 + h, y_0) \ - \ f_1(x_0 - h, y_0)}{2h} + \frac{f_2(x_0, y_0 + h) \ - \ f_2(x_0, y_0 - h)}{2h} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) \ + \ \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0) \ = \mathrm{div} f\,(x_0, y_0)$$

Divergenz $= 0$: es fließt genauso viel rein, wie raus fließt : **Quellenfrei**

Im Fall $n = 3$ definiert man noch die **Rotation** bzw. **Wirbeldichte**

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,\, y,\, z) \;-\; \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,\, y,\, z) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,\, y,\, z) \;-\; \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,\, y,\, z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y,\, z) \;-\; \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y,\, z) \end{pmatrix}$$

Ebene Strömungen können in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet weden: <u>n=2</u>

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\tilde{\boldsymbol{f}}$ erhält man die Rotation: $(0,\, 0,\, \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y) - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y))^T$. Man definiert daher für $n = 2$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y)$$

Bei Flußproblemen = Zirkulation/Wirbeldichte, rot $= 0$: **Wirbelfrei**
Veranschaulichung wie oben: summiere die zum Rand eines kleinen Flächenstücks tangentialen Komponenten.

Für das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ einer Starrkörperrotation um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gilt $\|\mathrm{rot}\, v\| = 2\omega$, und $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ ist parallel zur Drehachse.

Später: Potentiale, Arbeitsintegrale, etc.

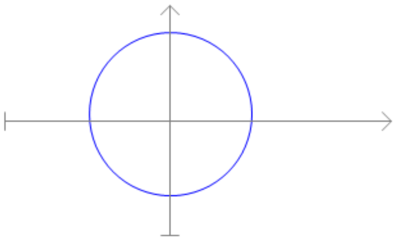
Beispiel a)

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = (xy^2 + xz^2,\, yx^2 + yz^2,\, zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,y,z) =$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (v_3)_y - (v_2)_z \\ (v_1)_z - (v_3)_x \\ (v_2)_x - (v_1)_y \end{pmatrix} =$$

Beispiel b) $\boldsymbol{u}(x,y) = (-y, x)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2$



$$\operatorname{div} u(x,y) = (u_1)_x + (u_2)_y = (-y)_x + (x)_y = 0$$

$$\operatorname{rot} u(x,y) = (u_2)_x - (u_1)_y = (x)_x - (-y)_y = 1 - (-1) = 2\,.$$

Taylorpolynome

(Zu P1)

Zur Erinnerung: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ z.B. $f\,:\,(x,y,z)^T \;\mapsto\; f(x,y,z)$

Erste partielle Ableitungen $--> $ **Gradient** von f

grad $f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}),\, \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\,)^T$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$

$$\textbf{grad}\ f(x_0,y_0,z_0) \;=\; (f_x(x_0,y_0,z_0),\; f_y(x_0,y_0,z_0)\,,f_z(x_0,y_0,z_0))$$

Hessematrix von f:
Matrix der zweiten Ableitungen $H_{ij}(x,y) = f_{x_i x_j}$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$

$$Hf((x_0,y_0,z_0)) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{zx}(x_0,y_0,z_0) & f_{zy}(x_0,y_0,z_0) & f_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

f 2-mal stetig diff.bar $\Longrightarrow$ Hessematrix ist symmetrisch!

Noch mehr Erinnerungen: im $\mathbb{R}^1$:

Taylorpolynom 0.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0**:** $T_0(x) = f(x_0)$

Taylorpolynom 1.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0**:**

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylorpolynom 2.ten Grades:

$$\begin{aligned} T_2(x) = \; & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ & = T_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ & = T_1(x) + \frac{1}{2!} (x - x_0) f''(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

NEU: im $\mathbb{R}^n$: Entwickle $f(\boldsymbol{g}(h))$, $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$

$T_0 = f(\boldsymbol{x}_0), \qquad T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \text{ grad } f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^2:}$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \text{ grad } f(x_0, y_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) =$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^3:}$ analog:

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$
$$+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen $\times$ entsprechender Schrittweiten.

$\underline{D \subset \mathbb{R}^1:}$ $\qquad T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}\,(x - x_0) f''(x_0)(x - x_0).$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^n:}$ $\qquad T_2(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T\, Hf(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^2:}$

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ f_{yx}(x_0,y_0)(y - y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y - y_0)^2\Big]$$

Also $T_2 = T_1 + \dfrac{1}{2!} \sum$ 2-te Ableitungen $\times$ entsprechende Schrittweiten.

Für C^2-Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$ und damit

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f(x_0,y_0) \, + \, & f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \, + \, f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \, + \, 2f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0) \right. \\ & \left. + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Beachtet man noch:

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

so kann man T_2 auch schreiben als:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!} & \left[\binom{2}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \right. \\ & \left. + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \binom{2}{0} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^3:}$ $\quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T,\ \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T,$

$$T_0(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)\ ,$$

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \ <\ \text{grad}\, f(x_0, y_0, z_0), (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\ >$$

$$= f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \ f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (x - x_0) + \ f_y \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (y - y_0) + \ f_z \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (z - z_0)\ .$$

$$T_2(x, y, z) = T_1(x, y, z) + \ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}^T Hf(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x, y) + \ \frac{1}{2!} \Big[f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 \ + \ 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0)$$
$$+ \ 2 \cdot f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + \ f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2$$
$$+\, 2 \cdot f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + \ f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \Big]$$

Beispiel: Gesucht Taylorpolynom zweiten Grades von

$$f(x,y,z) = \sin(x+y) + xe^{z-y} - z^2 + y \qquad \boldsymbol{x}_0 = (0,0,0).$$

	im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$
$f(x,y,z) = \sin(x+y) + xe^{z-y} - z^2 + y,$	$f(0,0,0) =$
$f_x(x,y,z) =$	$f_x(0,0,0) =$
$f_y(x,y,z) = \cos(x+y) - xe^{z-y} + 1,$	$f_y(0,0,0) =$
$f_z(x,y,z) = xe^{z-y} - 2z,$	$f_z(0,0,0) =$
$f_{xx}(x,y,z) =$	$f_{xx}(0,0,0) =$
$f_{xy}(x,y,z) =$	$f_{xy}(0,0,0) =$
$f_{xz}(x,y,z) =$	$f_{xz}(0,0,0) =$
$f_{yy}(x,y,z) = -\sin(x+y) + xe^{z-y},$	$f_{yy}(0,0,0) =$
$f_{yz}(x,y,z) = -xe^{z-y},$	$f_{yz}(0,0,0) =$
$f_{zz}(x,y,z) = xe^{z-y} - 2,$	$f_{zz}(0,0,0) =$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = &\ f(x_0,y_0,z_0) + \ f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) \\
&+ \ f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \ f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\
&+ \ \frac{1}{2!}\Big[\, f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 \ + \ 2\cdot f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
&+ \ 2\cdot f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + \ f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 \\
&+ 2\cdot f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0) + \ f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = &\ f(0,0,0) + \ f_x(0,0,0)(x-0) \\
&+ \ f_y(0,0,0)(y-0) + \ f_z(0,0,0)(z-0) \\
&+ \ \frac{1}{2}\Big[\, f_{xx}(0,0,0)(x-0)^2 \ + \ 2\cdot f_{xy}(0,0,0)(x-0)(y-0) \\
&+ \ 2\cdot f_{xz}(0,0,0)(x-0)(z-0) + \ f_{yy}(0,0,0)(y-0)^2 \\
&+ 2\cdot f_{yz}(0,0,0)(y-0)(z-0) + \ f_{zz}(0,0,0)(z-0)^2\Big] \\
&=
\end{aligned}
$$

Anderer Entwicklungspunkt:

Beispiel: Gesucht Taylorpolynom zweiten Grades von
$f(x,y,z) = \sin(x+y) \;+\; xe^{z-y} \;-\; z^2 \;+\; y \qquad \boldsymbol{x}_0 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

	im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$
$f(x,y,z) = \sin(x+y) \;+\; xe^{z-y} \;-\; z^2 \;+\; y,$	$f(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$
$f_x(x,y,z) = \cos(x+y) + e^{z-y},$	$f_x(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$
$f_y(x,y,z) = \cos(x+y) - xe^{z-y} + 1,$	$f_y(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$
$f_z(x,y,z) = xe^{z-y} - 2z,$	$f_z(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \;-\; \frac{3\pi}{4}$
$f_{xx}(x,y,z) = -\sin(x+y),$	$f_{xx}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \; 0$
$f_{xy}(x,y,z) = -\sin(x+y) - e^{z-y},$	$f_{xy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \; -1$
$f_{xz}(x,y,z) = e^{z-y},$	$f_{xz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \; 1$
$f_{yy}(x,y,z) = -\sin(x+y) + xe^{z-y},$	$f_{yy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \;-\; \frac{\pi}{4}$
$f_{yz}(x,y,z) = -xe^{z-y},$	$f_{yz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \; \frac{\pi}{4}$
$f_{zz}(x,y,z) = xe^{z-y} - 2,$	$f_{zz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \;-\; \frac{\pi}{4} \;-\; 2$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= f(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) + \, f_x(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4})) \\
&+ \, f_y(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) + \, f_z(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) \\
&+ \, \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))^2 \, + \, 2\cdot f_{xy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) \\
&+ \, 2\cdot f_{xz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4}) + \, f_{yy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 \\
&+ 2\cdot f_{yz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) + \, f_{zz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})^2 \Big] \\
&=
\end{aligned}
$$

Fehlerabschätzung für $f(x,y,z) - T_2(x,y,z)$: nächstes Mal!