Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 2 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Höhenlinien, Gradienten, höhere Ableitungen

bisher $f: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ skalar

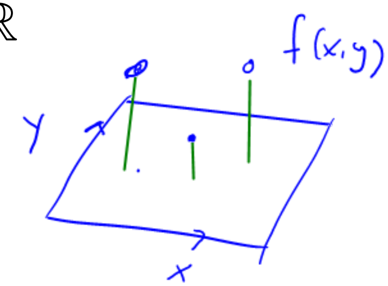
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Kurven

$\vec{v} \longmapsto A\vec{v}$ $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear

Ana III Allgemein $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

einfachster Fall mit $n>1$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

Veranschaulichung von Funktionen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$

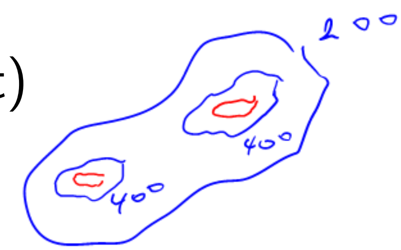


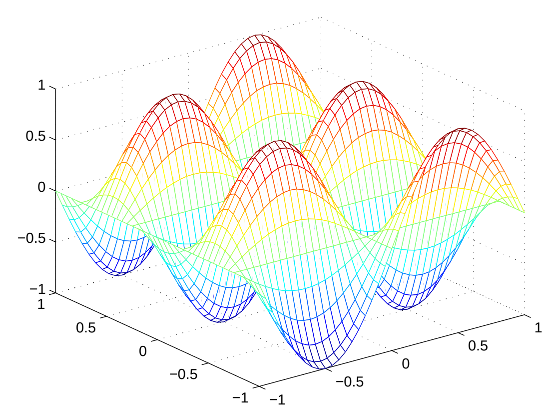
Gegeben: Funktion $f\ : D \to\ \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiele: Temperatur an einzelnen Punkten einer Herdplatte, für ein Stück der Erde (näherungsweise eben, also Erdkrümmung vernachlässigt) Höhe über dem Meeresspiegel oder Luftdruck.

Veranschaulichung:

- Als Fläche $(x, y, f(x, y))^T \in\ \mathbb{R}^3$ (Modell einer Landschaft)





$$f(x, y)\ =\ \cos(2\pi y)\, \sin(\pi x) :$$

oder

- Mit Hilfe von **Höhenlinien** = Kurven auf denen f konstant ist

Höhe über dem Meeresspiegel, Äquipotentiallinien, Isobaren

Beispiel 1: $z = f(x,y) \; = \; \exp\left(-(x^2 + \; y^2)\right),$

Höhenlinien: $\exp\left(-(x^2 + \; y^2)\right) = K \iff -(x^2 + \; y^2) = \ln(K) =: c$

$x^2 + y^2 = -c = r^2$ konst.

$\sqrt{x^2+y^2}$ = Abstand zu 0 konstant

$\longrightarrow$ Höhenlinien sind Kreise um $\binom{0}{0}$

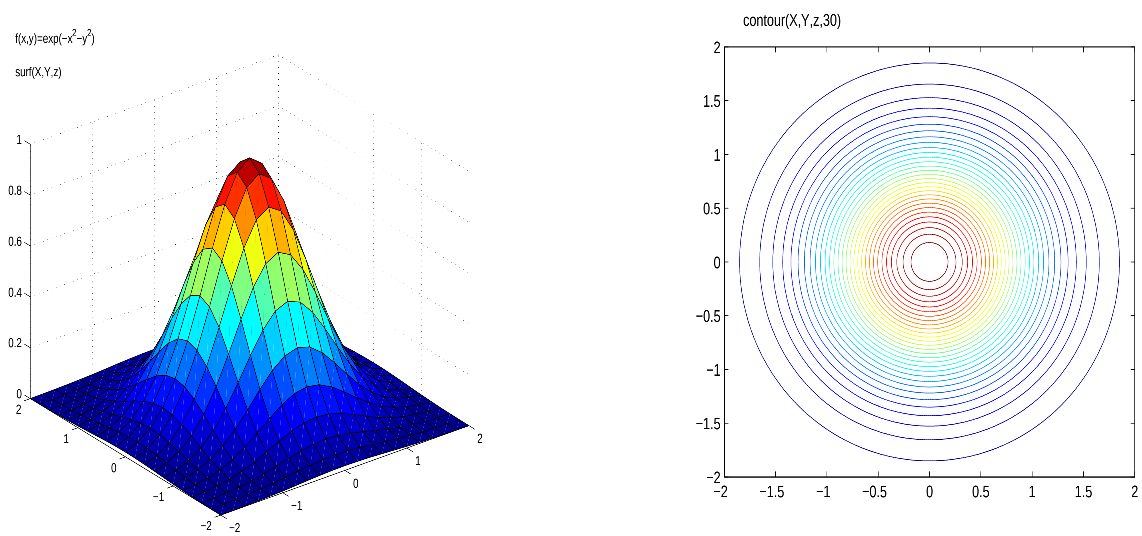


Abbildung 1: Höhenlinien

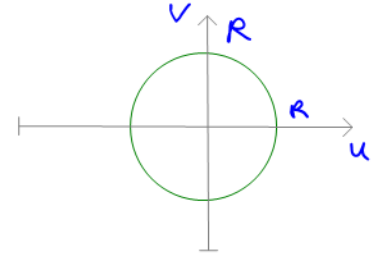
Beispiel 2: $z = f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 = R^2$

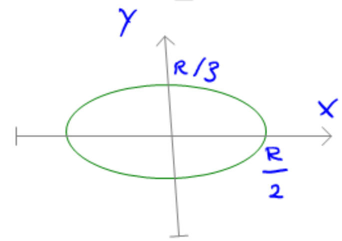
$$\underbrace{(2x)}_{u}{}^2 \; \underbrace{(3y)}_{v}{}^2 = R^2$$

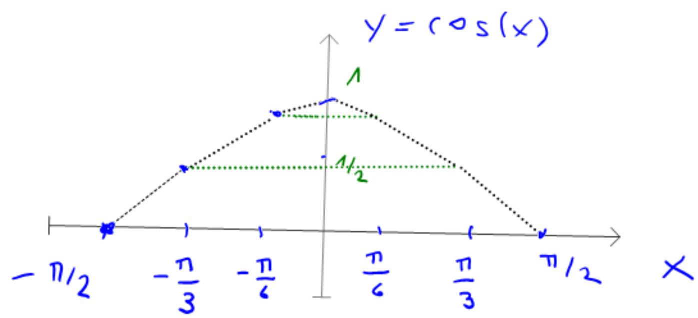
$$u^2 + v^2 = R^2$$

$$x = u/2 \qquad y = \frac{v}{3}$$

Höhenlinien sind Ellipsen mit Hauptachsenverhältnis $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

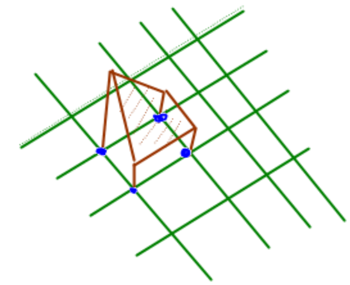






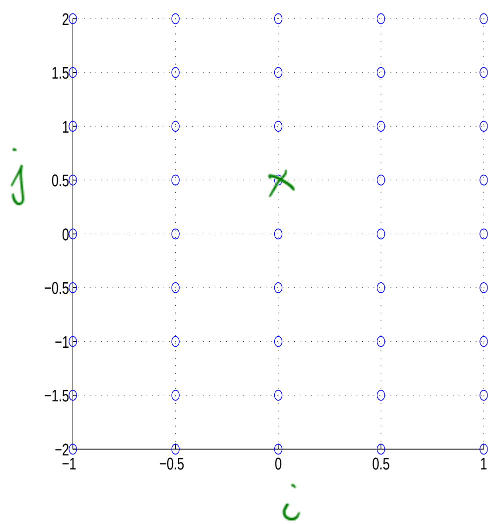
Und was, wenn es komplizierter wird?
Aus 1D bekannt: Lineare Interpolation

Ziel: Veranschaulichung/Auswertung einer Funktion $z = f(x, y)$ auf einem x, y Gitter mit $x-$ bzw. $y-$Unterteilung :



$x : x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \cdots, x_n$ hier $x_0 = -1$, $h = 0.5$, $x_n = 1$

$y : y_0, y_0 + k, y_0 + 2k, \cdots, y_m$ hier $y_0 = -2$, $k = 0.5$, $y_m = 2$



Ausgewählte MATLAB Befehle

Alternativ: ez-Befehle, zum Beispiel ezsurf, ezplot etc. Informieren Sie sich bei Bedarf mittels help ezsurf, help ezplot, etc.

MATLAB–Befehle:

```
>> x=[-1 : 0.5 : 1] ;                Hier wird ein x bzw. ein
>> y=[-2 : 0.5 : 2] ;                y-Vektor erzeugt
```

Die Funktionswerte sollen für jede Kombination der $x, y-$Werte berechnet und geplottet werden. Das geht einfach mit:

```
>>  [X,Y]=meshgrid(x,y);    Hier wird ein Gitter von
x,y-Werten erzeugt
```

Funktionsauswertung:

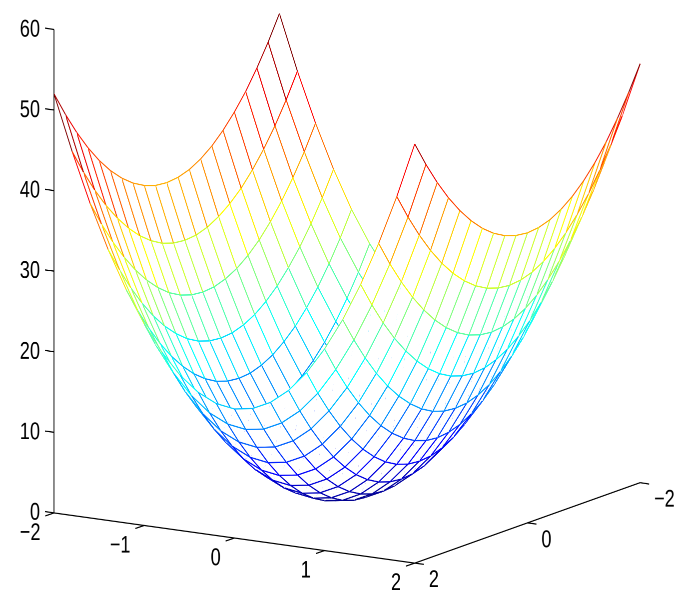
```
>>  z = 4*X.*X + 9*Y.*Y;
```

Beachten Sie die Vektoroperation : $.*$
MATLAB muss schon wissen, dass komponentenweise multipliziert werden soll!!

Veranschaulichung als Netz

Befehlsfolge:

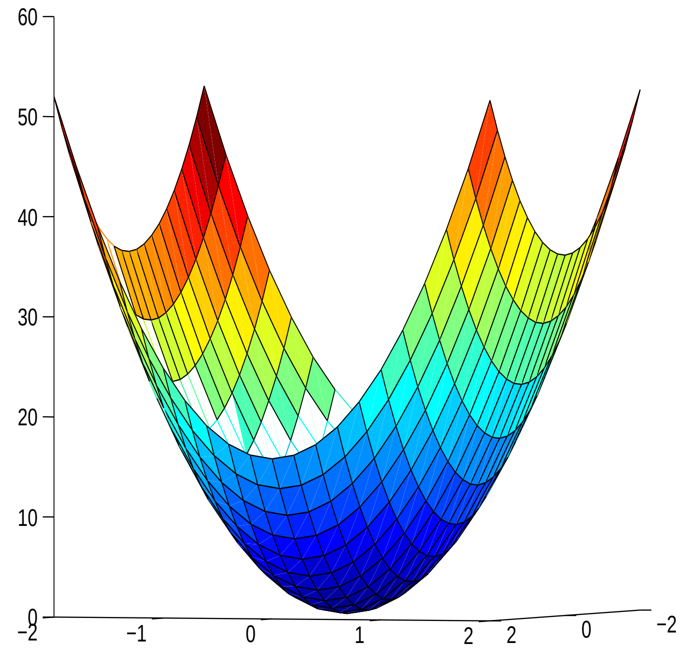
```
>>
hold on
x=[-2 : .2 : 2];
y=[-2 : .2 : 2];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

z=4*X.^2 + 9*Y.^2;

mesh(X,Y,z)
```



Veranschaulichung als Fläche

Befehlsfolge:

```
>>
hold on
x=[-2 : .2 : 2];
y=[-2 : .2 : 2];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

z=4*X.^2 + 9*Y.^2;

surf(X,Y,z)
```



Höhenlinien

a) contour(X,Y,z,30) : Es werden 30 Höhenlinien gezeichnet

b) Die Befehlsfolge

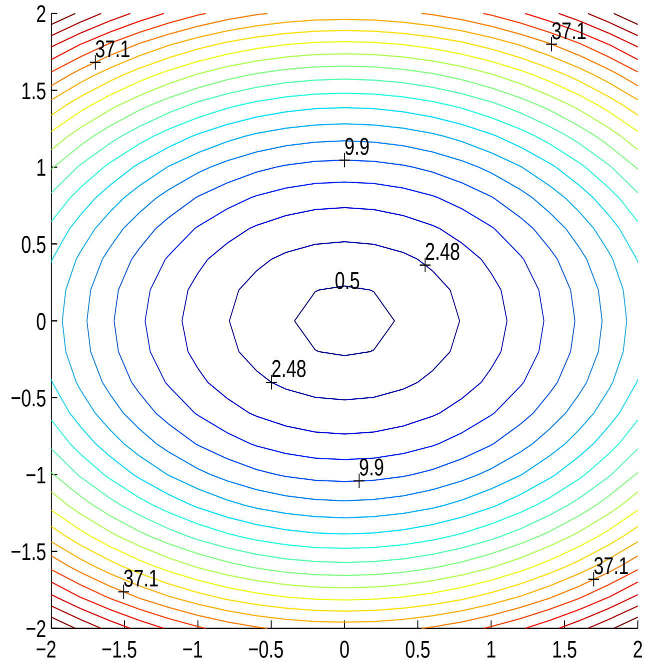
```
>>cs=contour(X,Y,z,20);

>>clabel(cs,'manual');
```

bewirkt das plotten von 20 Höhenlinien, die man mit der Maus anfahren kann. An den angeklickten Höhenlinien werden die Werte von f angegeben. In unserem Beispiel bleibt zunächst der mittlere Bereich des Bildes leer. Die Höhenlinie zu 0.5 wurde nachträglich eingefügt (s.unten).

c) Der Befehl

```
>> contour(X,Y,z,[.5 .5]);
```

Bewirkt das Zeichnen der Höhenlinie $C := \left\{ \binom{x}{y} : f(x,y) = 0.5 \right\}$.



Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Frage: Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn ich an einer oder an mehreren Variablen wackle?

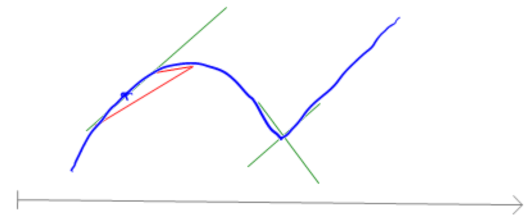
Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

Stetigkeit: wie im $\mathbb{R}^1$, genau: Vorlesung!

Kurzform: für jede Folge $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus D

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x} \Longrightarrow \lim_{k \to \infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}) \,.$$

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^1$: Stichworte



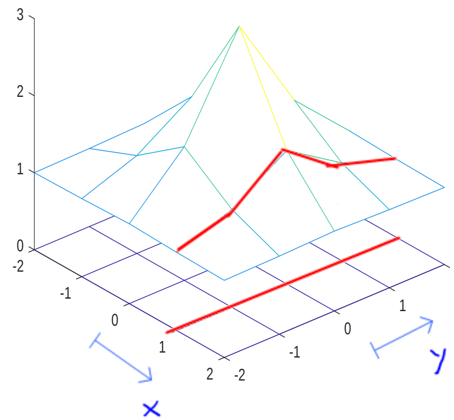
Tangentensteigung,

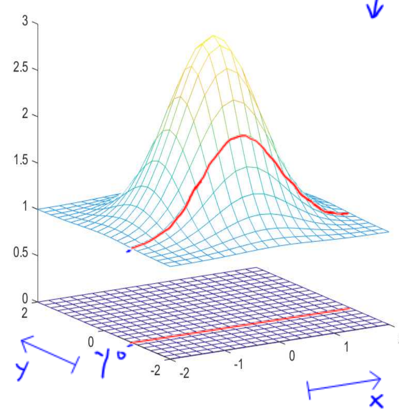
Hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

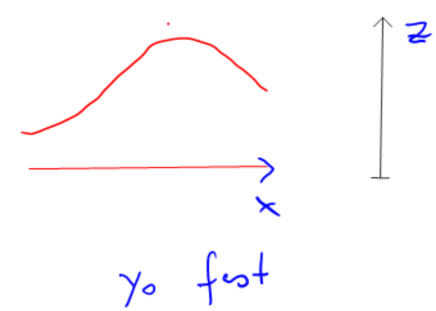
Änderungsrate: Wie stark ändert sich der Wert von f bei Änderung von t?

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Analog jetzt: $\dfrac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$







f heißt **partiell differenzierbar nach** x_j in $\boldsymbol{x} \in D$, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j + h \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

existiert. Im Falle der Existenz heißt der obige Wert

partielle Ableitung von f nach x_j $=: \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) =: f_{x_j}(\boldsymbol{x})$

f heißt partiell differenzierbar, wenn f nach allen Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle f_{x_j}, $j = 1, \ldots, n$ stetig sind.

Beispiel

$$f(x,y,z) := xy^2\cos(z) \implies$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\overbrace{y^2\cos(z)}^{\text{wie Konstante behandeln}}\right) = y^2\cos(z)$$

$$f_y(x,y,z) = \partial/\partial y\left(x\,y^2\cos(z)\right) = x\cos(z)\cdot 2y$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2\cos(z)\right) = xy^2(-\sin(z))$$

Im Falle der Existenz: wird der Zeilenvektor der partiellen Ableitungen **Gradient** von f genannt. Oder mit Hilfe des Differentialoperators Nabla $\nabla \cdot f$

$$\textbf{grad}\ f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})) = (\nabla \cdot f(x_1,\ldots,x_n))^T.$$

$$\text{grad}\, f(x,y,z) = \left(y^2\cos(x),\ 2xy\cos(z),\ -xy^2\sin(z)\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix}}_{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}$$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $f(x, y, z) = xy^2 \cos(z)$

grad $f(\boldsymbol{x}) = \left(y^2 \cos(z), 2xy\cos(z), -xy^2 \sin(z) \right)$

$\mathrm{grad}(10,1,0) = \left(1^2 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1},\ 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1},\ -10 \cdot 1^2 \underbrace{\sin(0)}_{0} \right)$

Zum Beispiel: grad $f(10, 1, 0) = \underline{(1,\ 20,\ 0\,)}$.

Und was heißt das?

ACHTUNG: Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt nicht einmal die Stetigkeit! (siehe Vorlesung)

Veranschaulichung bei n=2: Hefte an Punkten (x, y) Vektoren in Richtung und Länge von $\operatorname{grad} f(x, y)$ an.

Beispiel: $f(x, y) = \exp(xy) = e^{xy}$

Höhenlinien: $e^{xy} = k \xrightarrow{\ln} xy = \ln(k) = c$

$x \neq 0 \longrightarrow y = \frac{c}{x}$ Hyperbeln

$x = 0 \quad : \quad f(0, y) = e^0 = 1 = c_1$

Gradient: $\operatorname{grad} f(x, y) = \Big(e^{xy} \cdot \underbrace{(xy)_x}_{y} \, , \, e^{xy} \underbrace{(xy)_y}_{x} \Big)$

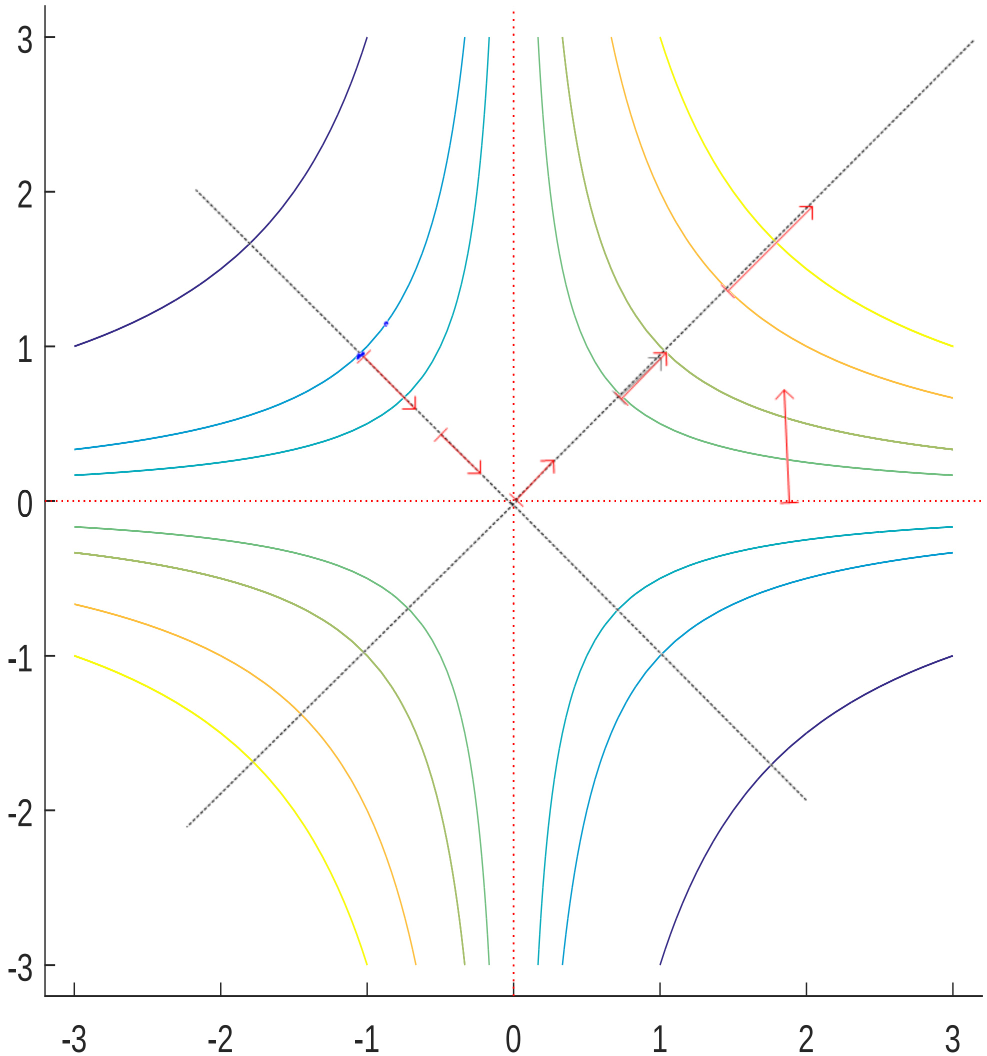
$= e^{xy} \, (y, x)$

$\left(e^{xy}\right)_x$ wie $\left(e^{x \cdot 2}\right)_x$

$\| \qquad\qquad \|$

$y e^{xy} \qquad\qquad 2 e^{x \cdot 2}$

$\Longrightarrow \nabla f(x, y) = e^{xy} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$



$$\text{grad } f(x,y) = e^{xy} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}^T$$

$$\text{grad } f(1,1) = e^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

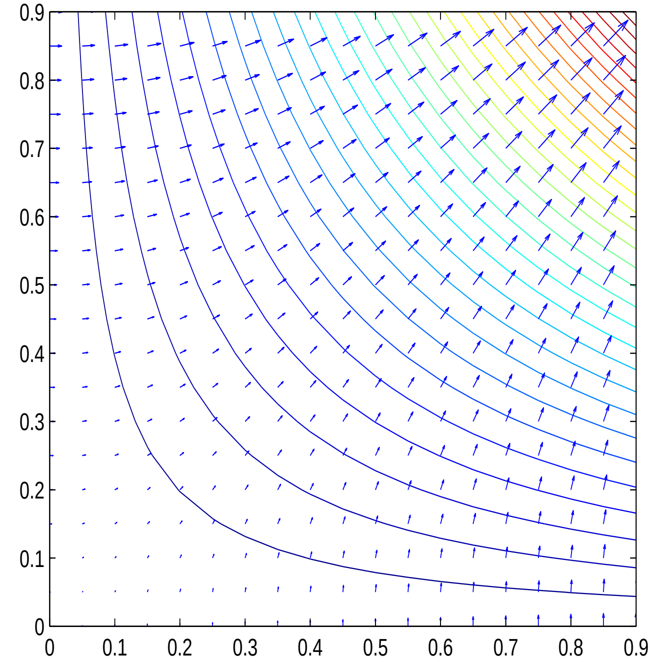
$$\text{grad } f(\alpha,\alpha) = e^{\alpha \cdot \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = e^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung von Gradientenfeldern mit Matlab

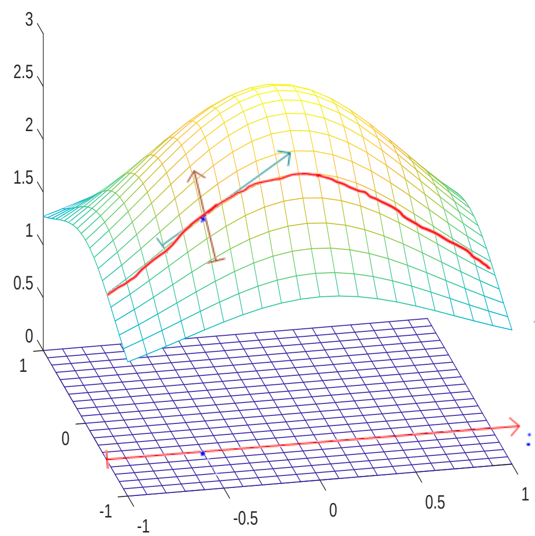
```
hold off
x=[-0.0 : .05 : .9];
y=[-0.0 : .05 : .9];
[X,Y] = meshgrid(x,y);
z= exp(X.*Y);
contour(X,Y,z,30) %Höhenlinien

hold on
[px,py] = gradient(z);  % Gradient
quiver(X,Y,px,py)   %in (X,Y) wird
%      der Vektor (px,py) angeheftet
```



Tangentialebene an f in x_0.

$f\ : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$ beliebige in $(x_0, y_0) \in D$ diff.bare Funktion

Was entspricht der Tangente aus dem $D \subset \mathbb{R}$ Fall?



$t(x, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$

$t(x_0, y) = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y)(y - y_0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$f(x_0, y_0)$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} z(x,y) &:= f(x_0, y_0) + \textbf{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

$(x, y, z(x, y))^T$: Ebene im $\mathbb{R}^3$

schmiegt sich in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))^T$ an die Fläche $(x, y, f(x, y))^T$ an, wenn f diffbar!

Beispiel: $f(x,y) := 4 - x^2 - y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$f(x_0, y_0) = 4 - 1^2 - 3^2$
$= -6$

$f_x(x,y) = -2x$

$f_x(1,3) = -2$

$f_y(x,y) = -2y$

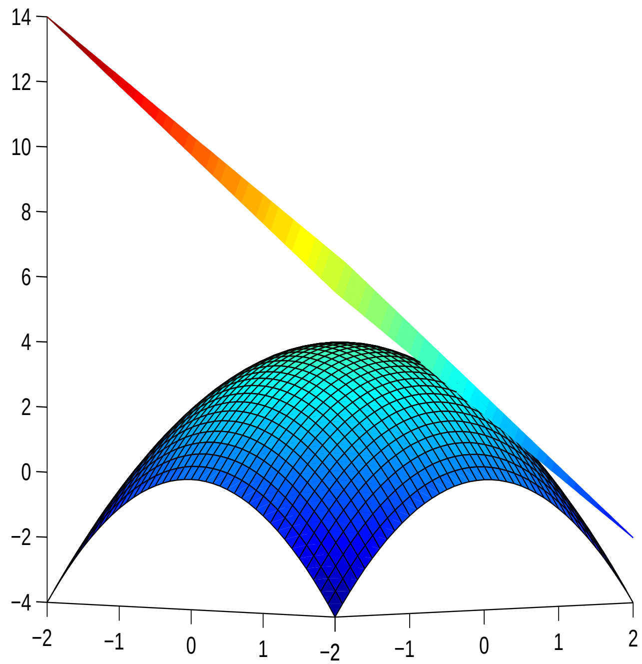
$f_y(1,3) = -6$

$$T(x,y) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

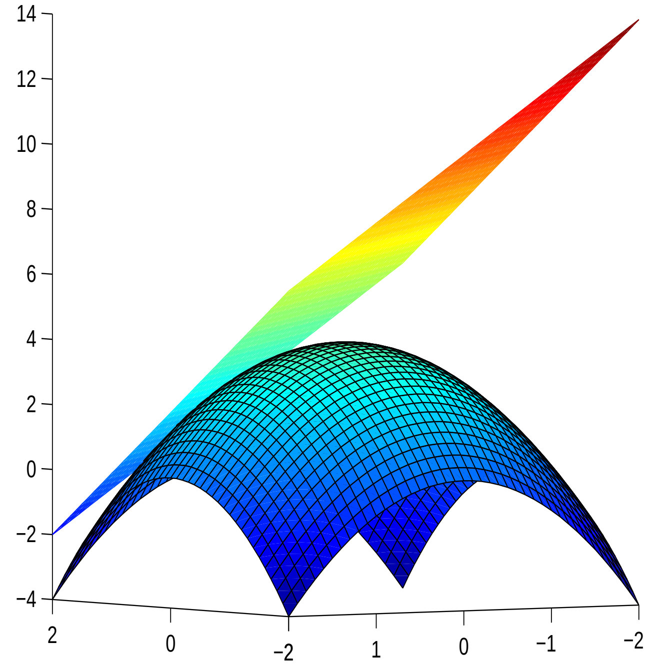
$f(1,3) = -6$

$f_x(x,y) = -2x \qquad f_y(x,y) = -2y$

$T(x,y) = -6 - 2(x-1) - 6(y-3)$



14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−2
−1
0
1
−2
−1
0
1
2



14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
2
0
−2
1
0
−1
−2

Ableitungen höherer Ordnung

Ist f part. diffbar. auf einer offenen Menge D, so kann man versuchen die partiellen Ableitungen erneut partiell abzuleiten.

Beispiel: $f(x,y,z) := xy^2\cos(z)$. Mit

$$f_x(x,y,z) = y^2\cos(z), \qquad f_y(x,y,z) = 2xy\cos(z) =: g(x,y,z)$$

$$f_z(x,y,z) = xy^2(-\sin(z)),$$

Damit erhalten wir zum Beispiel

$$g_x = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y,z) =: f_{yx}(x,y,z) = (2xy\cos(z))_x = 2y\cos(z)$$

$$g_y = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y,z) =: f_{yy}(x,y,z) = (2xy\cdot\cos(z))_y = 2x\cos(z)$$

$$g_z = \frac{\partial}{\partial z} f_y(x,y,z) =: f_{yz}(x,y,z) = (2xy\cos(z))_z = -2xy\sin(z)$$

Insgesamt erhält man 9 sogenannte zweite Ableitungen, die man zur **Hessematrix** von f zusammenfasst:

$$\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_x(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad } f_y(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad } f_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f \text{ 2-mal stetig partiell diff.bar } \Longrightarrow H f \text{ symmetrisch.}}$$

Schreibweise :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} f$$

Zurück zum Beispiel:

Wir hatten bereits:

$$f_x(x,y,z) = y^2\cos(z),$$

$$f_y(x,y,z) = 2xy\cos(z),$$

$$f_z(x,y,z) = xy^2(-\sin(z)),$$

$$f_{yx}(x,y,z) = 2y\cos(z),$$

$$f_{yy}(x,y,z) = 2x\cos(z),$$

$$f_{yz}(x,y,z) = -2xy\sin(z).$$

$f_{xx}(x,y,z) = 0$

$f_{xz} = f_{zx} = -y^2 \sin(z)$

$f_{zz} = -xy^2 \cos(z)$

Zu den Hausaufgaben:

- Symmetrie nutzen z. B. bei $\underline{(x^2+y^2+z^2)}\, e^{x+y+z}$
- Überlegen wonach zuerst abgeleitet werden sollte

$\arcsin(y)\cdot x + z^2 e^{1-y} \sin(x)$ gesucht $f_{yz} = f_{zy}$

$\longrightarrow$ erst nach z ableiten

$f_{yz} = f_{zy} = \left(0 + 2z e^{1-y} \cdot \sin(x)\right)_y$

Noch ein Beispiel:

Gegeben ist die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \qquad u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion u die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung
$u_t = u_{xx}$ löst.

b) Skizzieren Sie die Lösung für mindestens vier verschiedene $t-$Werte.

Lösungsskizze:

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}\, x^2 t^{-1}\right)$$

a) Zu berechnen sind die Ableitungen

$$-\frac{1}{2}\, t^{-3/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} + t^{-1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{4} x^2 t^{-1}\right)_t$$

$$u_t = -\frac{1}{2}\, t^{-3/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} + t^{-1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{4} x^2 (-1)\, t^{-2}\right)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\frac{1}{2}\, t^{-3/2} + \frac{1}{4} x^2 t^{-5/2}\right] \qquad (*)$$

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{4} t^{-1} x^2\right)\right) = t^{-1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{x^2}{4t}\right)_t$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(t^{-1/2}\right)\left(-\frac{1}{4} t^{-1}\right) \cdot (2x) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\frac{1}{2}\, t^{-3/2}\, x\right]$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2}\, t^{-3/2} \left[x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]_x = -\frac{1}{2}\, t^{-\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{x^2}{4t}} + x\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{x^2}{4t}\right)_x\right]$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\frac{1}{2}\, t^{-3/2} - \frac{1}{\cancel{2}}\, t^{-3/2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot \cancel{2}x\right] = e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\frac{1}{2}\, t^{-3/2} + \frac{1}{4} x^2 t^{-5/2}\right] \qquad (**)$$

$(*) = (**) \longleftrightarrow u_t = u_{xx}$

$\Longrightarrow$ u löst Wärmeleitungsgleichung

b)