Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

Wise 21/22
24.01.2022

Klausurberatung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres partielles ableiten,
- $\nabla f = \mathrm{grad}\, f^T =$ Vektor der ersten Ableitungen,
- $\nabla^2 \boldsymbol{f} = \ H\boldsymbol{f} =$ Matrix der zweiten Ableitungen,
- Verlauf und Ableitung elementarer Funktionen

  Für die Fehlerabschätzung bei Taylorpolynomen.
- Eigenwerte berechnen, bzw. deren Vorzeichen,
- **rot** $\boldsymbol{f}$, div $\boldsymbol{f}$, Rotation, Divergenz,
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Jacobi-Matrix

  Für Kurvenintegrale / Oberflächenintegrale
- Einfache Integration, sehr einfache Substitutionen $(\cos(k\phi)$ etc.), partielle Integration.

  zum Beispiel $\int \cos(5\varphi)\, d\varphi$, $\int \sin(3\varphi)\, d\varphi$, $\int e^{7x}\, dx$

Top Themen der letzten Klausuren

(In der Reihenfolge der Bearbeitung im Semester)

- **Taylorpolynom mit Fehlerabschätzung**

  Passende Aufgaben: Blätter 4: P1, H1, H2

- **Min/Max ohne Nebenbedingung**

  – Kandidaten: $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$
  – Klassifikation: Eigenwerte Hessematrix Hf

  Passende Aufgaben: Blätter 4: P1, P2, H1

- **Satz über implizite Funktionen, implizit def. Kurven**
  Auflösbarkeit prüfen,
  Taylor-Polynom ersten grades von $y = g(x)$ bzw. $x = g(y)$.
  Passende Aufgabe: Blatt 4: H2, Blatt 5: H1.

- **Min/Max mit Nebenbedingung**

  - Zulässigkeit, Regularitätsbedingung
  - Lagrangefunktion F aufstellen
  - Stationäre Punkte: $\operatorname{grad} F = 0$
  - Hessematrix $\boldsymbol{H}\,F$ berechnen
  - Definitheit der Hessematrix prüfen.
  - Eventuell Tangentialraum berechnen, Definitheit der Hessematrix darauf testen.

  Passende Aufgaben: Blätter 5: P1, P2, H2

- **Bereichsintegrale**

  - direkt berechnen
  - Transformationssatz (Polar–, Zylinder–, Kugelkoordinaten)
  - Volumen, Masse, Trägheitsmoment, Fluss (Gauß)

  Passende Aufgaben: Blätter 7: P2, H2, Blätter 6: komplett, Blätter 5: H3

- **Kurvenintegrale**
  - Rotation berechnen
  - Potential berechnen $\longrightarrow$ Kurvenintegral über Potential (Hauptsatz)
  - Kurvenintegral direkt berechnen
  - Sätze von Green (Gauß in der Ebene)

  Passende Aufgaben: Blätter 7: Aufgaben P1, H1

- **Oberflächenintegrale**
  - Parametrisierung
  - Fluss, Satz von Gauß

  Passende Aufgaben: Blätter 7: P2, H2

WZ = Werkzeug

V = Sollte das Verständnis förder

ϕ = Nicht als Klausuraufgabe

- **Blatt 1:**
  P1:Mengen im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, Begriffe: beschränkt, abgeschlossen, konvex etc. WZ
  P2: Höhenlinien skizzieren ∅

  Keine Hausaufgaben

- **Blätter 2:**
  P1a: Gradienten berechnen WZ
  P1 b-c: Höhenlinien und Gradientenrichtung skizzieren, V ∅
  P1 d: Vermutung Höhenlinie senkrecht auf Gradient. ∅

  P2a: Ableitungen bis Ordnung 3 berechnen, WZ
  P2b: $\underbrace{\text{grad und Hesse}}_{\text{XX}}$ $\underbrace{\text{matrix berechenen}}_{\text{WZ/Teil einer Aufgabe}}$, $\underbrace{\text{Tangentialebene}}_{=\text{Taylor ersten Grades}}$. xx

  H1:Ableitungen bis Ordnung 3 berechnen, $\nabla-$Operator. WZ
  H2: Zeige gegebene Funktion löst Wellengleichung etc. ∅

- **Blätter 3:**

  - P1: Jacobi-Matrizen und deren Determinanten berechnen. WZ
  - P2: Taylor 2. Grades, $\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ ohne Fehlerabschätzung Muss man mal gemacht haben

  - H1: Niveau-Flächen, Richtungsableitungen, An- /Abstiegsrichtung V

  - H2: Berechnung von Rotation (Wirbeldichte, **rot**, **curl**), Green
    Berechnung von Divergenz (Quelldichte, div), Gauß
    Skizze von Stromlinien $\not\!\phi$

    Vorbereitung für Blätter 6/7 WZ

- **Blätter 4:**

  – P1a: Taylor 2. Grades, $\mathbb{R}^2$ über Sinus-Reihe und Minimum T_2, xxx
  P1b: Fehlerabschätzung in einem Punkt,
  P1c: Fehlerabschätzung auf Rechteck + $\underbrace{\text{Aussage über Min } f}_{\emptyset}$.
  xxx

  – P2: Stationäre Punkte ohne Nebenbedingung, xxx
  Min/Max/Sattel klassifizieren

  – H1a-b:Taylorpolynom T_2 mit Fehlerabschätzung,
  H1c: stationärer Punkt von T_2 mit Klassifikation. xxx

  – H2a: Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$ mit T_1 Berechnung, xxx
  H2b:Satz über implizite Funktionen im $\underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$. $\underline{\underline{\emptyset}}$

- **Blätter 5:**

  - P1: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$,
    Kandidaten unbekannt, Nichtlineares Gleichungssystem lösen xxx
    Klassifikation über Kompaktheit oder global definite Hesse-Matrix

  - P2: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^3$. xxx
    Kandidat gegeben Zeige $\exists$ Multiplikatoren λ_1, λ_2 so dass
    Hesse global definit Kandidat = stationärer Punkt der Lagrange Funktion

  - H1: Kurve im $\mathbb{R}^2$. Singuläre Punkte + Klassifikation,
    Punkte mit horizontaler/vertikaler Tangente.
  - H2: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$, xxx
    Kandidat gegeben,
    Hesse auf Tangentialraum prüfen.

  - H3: Bereichsintegrale ohne Trafo. Eher kombiniert mit Trafo, Green, Gauß

Klassifikation stationärer Punkte $\binom{x^*}{y^*}$ von f im $\mathbb{R}^2$

Falls

$$0 \neq \det Hf(x^*, y^*) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \begin{cases} < 0 \implies (x^*, y^*) \text{ Sattelpunkt} \\ > 0 \text{ und } (Hf)_{11} > 0 \implies (x^*, y^*) \text{ Minimum} \end{cases}$$

Es ist dann nicht nötig λ_1, λ_2 auszurechnen!

- **Blatt 6:** × × ×

  Alles wichtig außer Skizzen und elliptischen Koordinaten

  – P1: Bereichsintegral, a) kartesisch, b) Polarkoordinaten.

  – P2: Bereichsintegral, Zylinderkoordinaten,
  Masse, Trägheitsmoment.

  – H1a: Bereichsintegral, kartesisch, Schwerpunkt

  – H1b: Bereichsintegral, Kugelkoordinaten

  – H2: Bereichsintegral, elliptische Zylinderkoordinaten,
  Volumen, Masse, Trägheitsmoment.

- **Blatt 7:** ✗✗✗

  - P1a: Potential berechnen, Kurvenintegrale berechnen, Fluss (Green/Gauß in der Ebene) ✗✗✗

  - P1b: Kurvenintegral direkt berechnen, Satz von Green ✗✗✗

  - P2: Bereichsintegral, Oberflächenintegral, Gauß, Kugelkoordinaten. ✗✗✗

    

    $\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}$ $f(p(r,\varphi)) = \begin{pmatrix}\text{egal}\\ \text{"}\\ ?\end{pmatrix}$

  - H1: Rotation, Potential, Kurvenintegral direkt und über Potential berechnen. ✗✗✗

  - H2: Bereichsintegral, Oberflächenintegral, Gauß, Zylinderkoordinaten

    gute Übung