

Blatt 5 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Durch Berechnen Sie das Integral
über den Viertelkreisring

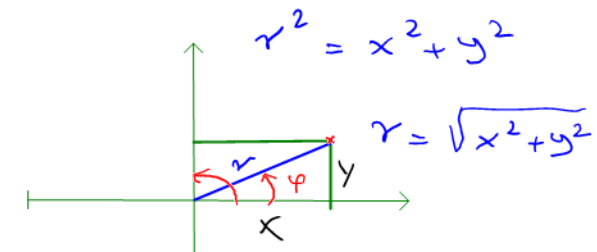
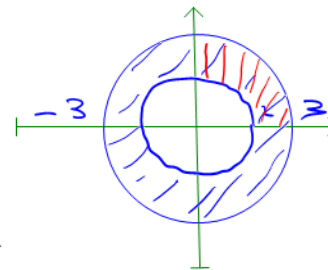
$$\int_D (x^3 + xy^2 + y) d(x, y)$$

$f(x, y)$

$$D := \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{4} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{9}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \}.$$

$$2 \leq r \leq 3$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$



$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_2^3 \int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) r d\varphi dr$$

↑ Trafo : kartesisch

→ Polar

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{r} \\ x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\int_D (x^3 + xy^2 + y) d(x, y)$$

$$= \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \left((r \cos(\varphi))^3 + (r \cos(\varphi))(r \sin(\varphi))^2 + r \sin(\varphi) \right) \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \iint \left(\frac{r^3 \cos^3(\varphi) + r^3 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) + r \sin(\varphi)}{\underbrace{r^3 \cos(\varphi) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1} \right) r \, d\varphi \, dr$$

$$= \iint (r^3 \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)) \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{r^4 \cdot \sin(\varphi)}_{\sin(\varphi)} + \underbrace{r^2 \sin(\varphi)}_{-\cos(\varphi)} \right) d\varphi \, dr$$

$$= \int_2^3 \left(r^4 \sin(\varphi) \Big|_0^{\pi/2} + r^2 (-\cos(\varphi)) \Big|_0^{\pi/2} \right) dr$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{1 - 0}$$

$$\frac{-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)}{0 + 1}$$

$$= \int_2^3 (r^4 + r^2) dr = \frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 = r^3 \left(\frac{r^2}{5} + \frac{1}{3} \right) \Big|_2^3$$

$$= 27 \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{3} \right) - 8 \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \right) = 27 \left(\frac{27+5}{15} \right) - 8 \left(\frac{12+5}{15} \right) = \frac{27 \cdot 32}{15} - \frac{8 \cdot 17}{15}$$

$$= 8 \left(\frac{27 \cdot 4}{15} - \frac{17}{15} \right) = 8 \left(\frac{108-17}{15} \right) = \frac{8 \cdot 91}{15} = \frac{728}{15} = 48,5\bar{3}$$

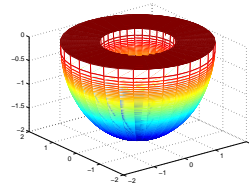
Aufgabe 2: Gegeben ist die mit einer Flüssigkeit gefüllte Kugelschale

$$D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}.$$

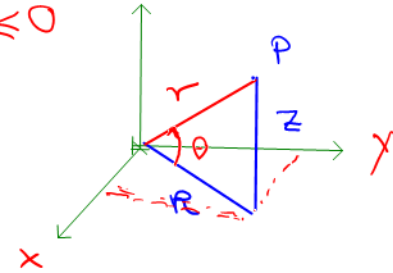
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{Abstand zu } 0$$

$$1 \leq r^2 \leq 4$$

$$1 \leq r \leq 2$$



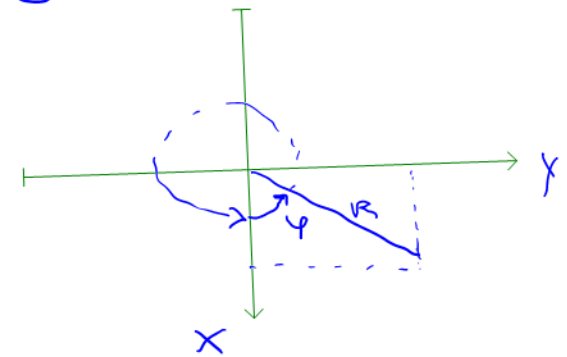
$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$



In der Flüssigkeit befinden sich schwebende Teilchen eines Stoffes S . Die Dichte des Stoffes S beträgt

$$\rho(x, y, z) = -z.$$

keine Einschränkung an x, y
 $\leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi$



Berechnen Sie die Masse des Stoffes S in D .

Hinweis: $2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

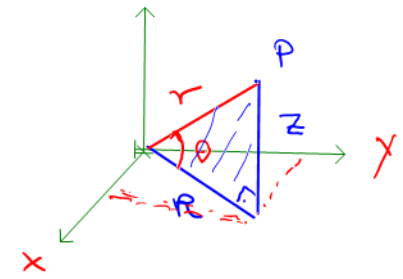
D in Kugelkoordinaten.

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

$$\text{Masse} = \int_D \underbrace{\rho(x, y, z)}_{-z} d(x, y, z) = \int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 \int_0^{2\pi} \rho(r, \varphi, \theta) \cdot \underbrace{r^2 \cos(\theta)}_{\text{Trafo: kartesisch} \rightarrow \text{Kugelkoordinaten}} \cdot d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 \int_0^{2\pi} \underbrace{-r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta)}_A d\varphi d\theta dr$$

$$[A\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\underline{A(2\pi - 0)}}$$



$$\sin(\theta) = \frac{z}{r}$$

$$z = r \sin(\theta)$$

$$= \int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 \left(\underbrace{-r^3 \sin(\theta) \cos(\theta)}_A \right) 2\pi d\theta dr$$

$$= \pi \int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 -r^3 \sin(2\theta) d\theta dr$$

$$\int \sin(\alpha \cdot x) dx = \frac{-\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha} + C$$

$$= \pi \int_1^2 \left[\frac{+\cos(2\theta)}{2} \right]_{-\pi/2}^0 dr = \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^3 \left[\frac{\cos(0)}{1} - \frac{\cos(-\pi)}{-1} \right] dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 2r^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} [2^4 - 1^4] = \pi \cdot \frac{15}{4}$$