Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2020/2021

Blatt 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**

Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Durch $g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$ ist implzit eine Kurve gegeben. Bestimmen Sie

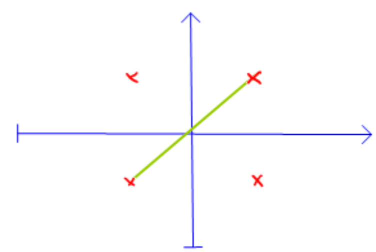
Symmetrien nur gerade Potenzen

$$g(x, y) = g(-x, y) = g(-x, -y) = g(x, -y)$$

Kurve y-Achsen symmetrisch

x-Achsen "

symmetrisch zu 0



Singuläre Punkte + Klassifikation

$g_x = g_y = g = 0$

$$g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

$g_x(x,y) = \underline{\underline{4x^3 - 2x}} = 2x(2x^2-1) = 0 \iff x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 1 = 0 \Updownarrow x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g_y(x,y) = \underline{\underline{2y}} = 0 \implies y = 0$

Kandidaten: $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$g_x = g_y = 0$

Auf Kurve? $\quad g(x,y) = 0$?

$g(0,0) = 0^4 - 0^2 + 0^2 = 0$ ✓

P_0 ist singulärer Punkt

$g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4} \neq 0 \implies$ P_1, P_2 liegen nicht auf der Kurve

Klassifikation: Eigenwerte Hessematrix

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Hg(P_0) = Hg(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 2 \implies \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \implies$ P_0 ist ein Doppelpunkt

Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente

$g_x = 0 \quad g = 0 \quad g_y \neq 0$

$$g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

$$g_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\vee\; x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g(0,y) = 0 - 0 + y^2 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ singulär}$$

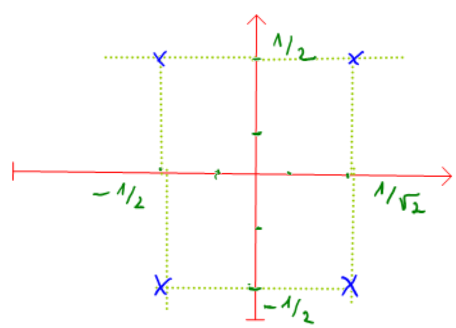
$$g\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, y\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + y^2 = -\frac{1}{4} + y^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \qquad y = \pm\frac{1}{2}$$

$$g_y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

Denn $g_y = 0 \Longleftrightarrow y = 0$

Punkte mit horizontalen Tangenten

$$P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/2 \end{pmatrix} \qquad P_{5,6} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}$$



Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente.

$\underline{g_y = 0}$ $\quad \underline{\underline{g = 0}}$ $\quad g_x \neq 0$

$$g(x,y) \;=\; x^4 - x^2 + y^2 \;=\; 0$$

$$g_y = 2y = 0 \implies \boxed{y = 0}$$

$$g(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \overset{!}{=} 0 \implies x = 0 \to P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

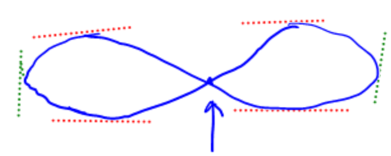
singulär

oder $x^2 - 1 = 0 \iff (x = 1 \vee x = -1)$

$$P_{7,8} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_x(\pm 1, 0) = 4(\pm 1)^3 - 2(\pm 1)$$

$$= \pm 4 \mp 2 \neq 0$$

$\implies$ $P_{7,8}$ sind Punkte mit vertikalen Tangenten



P_0 (Doppelpunkt)

siehe Musterlösung

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8 = 0$$

mit der Ebene

$$h(x, y, z) = x - y + 2z - 1 = 0.$$

Regularitätsbedingung (RB) : $J(g,h)$ hat vollen Rang $(= 2)$

$$J(g,h) = \begin{pmatrix} \text{grad } g \\ \text{grad } h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jacobi hat vollen Rang $\Longleftrightarrow$ $\alpha \cdot (1.\text{ Zeile}) + \beta (2.\text{ Zeile}) = 0$ $\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{\alpha = \beta = 0}}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0 + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$\Longrightarrow$ $\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\alpha \neq 0$ nur möglich mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(0, 0, z) = -8 \neq 0 \Rightarrow \nexists$ zulässigen Punkt mit $x = y = 0 \Rightarrow$ RB erfüllt $\forall$ zulässigen Punkte

$$f(x,y,z) = xy + z^2,$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 8 = 0, \qquad h(x,y,z) = x - y + 2z - 1 = 0.$$

Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ notwendig $\operatorname{grad} F = \vec{0}$ und $g=0$, $h=0$

$$\text{I} \quad F_x = f_x + \lambda g_x + \mu h_x = y + \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 1 = 0$$
$$\text{II} \quad F_y = f_y + \lambda g_y + \mu h_y = x + \lambda \cdot 2y + \mu(-1) = 0$$
$$\text{III} \quad F_z = f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 2z + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 = 0 \implies \boxed{\mu = -z}$$
$$\text{IV} \quad F_\lambda = g = x^2 + y^2 - 8 = 0$$
$$\text{V} \quad F_\mu = h = x - y + 2z - 1 = 0 \implies \boxed{z = \frac{1 - x + y}{2}}$$

$$\text{I} + \text{II} \quad y + x + \lambda 2x + \lambda 2y = (y+x) + 2\lambda(y+x) = (y+x)(1+2\lambda) = 0$$
$$\iff \boxed{y = -x \quad \vee \quad \lambda = -1/2}$$

1. Fall $y = -x$ $\overset{\text{IV}}{\implies}$ $x^2 + (-x)^2 - 8 = 0 \implies x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \quad y = \mp 2$

$$z_1 = \frac{1-2-2}{2} = -\frac{3}{2} \qquad z_2 = \frac{1+2+2}{2} = 5/2$$

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}}$$

2. Fall $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \text{I}: & y + 2\lambda x + \mu = 0 \\ \text{IV} & x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases} \qquad \mu = -z = \frac{-1 + x - y}{2}$$

$$\text{I} \Longrightarrow \quad y - x + \frac{-1 + x - y}{2} = 0 \iff -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (*)$$

$$y - 1 - x = 0 \iff \boxed{y = x + 1}$$

$$\text{IV} \quad x^2 + \underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1} - 8 = 0 \iff 2x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$\iff x^2 + x - \frac{7}{2} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\iff x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$(*) \quad y_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad y_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ z_3 = \frac{1 - x_3 + y_3}{2} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} -1/2 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = -1/2 - \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad y_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} \\ z_4 = \frac{1 - x_4 + y_4}{2} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_4 = \begin{pmatrix} -1/2 - \sqrt{15}/2 \\ 1/2 - \sqrt{15}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

$$f(P_1) = f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4}$$

kleinster Funktionswert

$$f(P_2) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = -4 + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$f(P_3) = x_3 \cdot y_3 + z_3^2 = \underbrace{\Big(\overset{-b}{-\frac{1}{2}} \overset{+a}{+ \frac{\sqrt{15}}{2}}\Big)\Big(\overset{+b}{\frac{1}{2}} \overset{+a}{+ \frac{\sqrt{15}}{2}}\Big)}_{a^2-b^2} + 1^2$$

$$= \Big(\overset{a^2}{\frac{15}{4}} \overset{-b^2}{-} \frac{1}{4}\Big) + 1 = \frac{9}{2}$$

$$f(P_4) = x_4 y_4 + z_4^2 = \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{-b} \underbrace{- \frac{\sqrt{15}}{2}}_{+a}\Big)\Big(\underbrace{\frac{1}{2}}_{b} \underbrace{- \frac{\sqrt{15}}{2}}_{+a}\Big) + 1^2$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{15}{4}}_{a^2} \underbrace{- \frac{1}{4}}_{-b^2}\Big) + 1 = \frac{9}{2}$$

größte Funktionswerte

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{globales Minimum in } P_1 \\ \text{globale Maxima in } P_3 \text{ und } P_4 \end{cases}$$