Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2020/2021

Blatt 3 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist $f(x, y, z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z)$.

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$.

b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x, y, z) = f(x, y, z) - T_2(x, y, z)$ folgende Abschätzng gilt:

$$|R_2(x, y, z)| \leq 0.02 \qquad \forall \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \leq 0.1 .$$

$-0.1 \leq x \leq 0.1$
$0.9 \leq y \leq 1.1$

Lösung Teil a):

$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z)\,.$$

in $\left(\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{1}, \overset{z_0}{\pi}\right)$

$f_x = z + e^x y^2 \cos(z) \leftarrow$

$f_y = 2y + 2e^x y \cos(z)$

$f_z = x - e^x y^2 \sin(z)$

$f_{xx} = e^x y^2 \cos(z)$

$f_{xy} = 2e^x y \cos(z)$

$f_{xz} = 1 - e^x y^2 \sin(z)$

$f_{yy} = 2 + 2e^x \cos(z)$

$f_{yz} = -2e^x y \sin(z)$

$f_{zz} = -e^x y^2 \cos(z)$

$2 + 0 + 1^2 + \underbrace{e^0 \cdot 1^2 \cos(\pi)}_{1\cdot 1\cdot(-1)} = 2$

$\pi + e^0 1^2 \cos(\pi) = \pi - 1$

$2 \cdot 1 + 2e^0 \cdot 1 \cdot \cos(\pi) = 2 - 2 = 0$

$0 - e^0 1^2 \sin(\pi) = 0$

$e^0 1^2 \cos(\pi) = -1$

$2e^0 1 \cos(\pi) = -2$

$1 - e^0 1^2 \sin(\pi) = 1$

$2 + 2e^0 \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = 0$

$-2e^0 \cdot 1 \cdot \sin(\pi) = 0$

$-e^0 \cdot 1^2 \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = 1$

$$T_2(\vec{x}^0) = \overset{2}{f(\vec{x}^0)} + \overset{\pi-1}{f_x(\vec{x}^0)}(x - \overset{0}{x_0}) + \overset{0}{f_y(\vec{x}^0)}(y - \overset{1}{y_0}) + \overset{0}{f_z(\vec{x}^0)}(z - \overset{\pi}{z_0})$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[\overset{-1}{f_{xx}(\vec{x}^0)}(x - \overset{0}{x_0})^{2} + 2\overset{-2}{f_{xy}(\vec{x}^0)}(x - \overset{0}{x_0})(y - \overset{1}{y_0}) + 2\overset{1}{f_{xz}}(\vec{x}^0)(x - \overset{0}{x_0})(z - \overset{\pi}{z_0}) + \overset{0}{f_{yy}}(\vec{x}^0)(y - \overset{1}{y_0})^2$$
$$+ 2\overset{0}{f_{yz}}(\vec{x}^0)(y - \overset{1}{y_0})(z - \overset{\pi}{z_0}) + \overset{1}{f_{zz}}(\vec{x}^0)(z - \overset{\pi}{z_0})^2\Big]$$

$$T_2(\vec{x}^0) = 2 + (\pi - 1)x + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{-1x^{2} + 2\cdot(-2)(x-0)(y-1)}\; + 2x(z-\pi) + 1(z-\pi)^2\Big]$$
$$= 2 + (\pi - 1)x - \frac{x^2}{2} - 2(xy - x) + x(z - \pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}$$

Lösung Teil b): Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$|R_m| = |f - T_m|$

n = Dimension

Hier $n = 3$, $m = 2$

$$|R_m(\vec{x})| \le \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \cdot C \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1}$$

C :

(m+1)-te Ableitungen

C : gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen

$$|R_3(x,y,z)| \le \frac{2^{2+1}}{(2+1)!}\, C \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty^{2+1}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty \le 0.1$$

Fehler

$$f_{xx} = e^x y^2 \cos(z),$$
$$f_{xy} = 2e^x y \cos(z),$$
$$f_{xz} = 1 - e^x y^2 \sin(z)$$
$$f_{yy} = 2 + 2e^x \cos(z)$$
$$f_{yz} = -2ye^x \sin(z)$$
$$f_{zz} = -e^x y^2 \cos(z).$$

$|f_{xxx}| = |e^x y^2 \cos(z)| = |e^x| \cdot |y^2| \cdot |\cos(z)| \le e^x \cdot y^2 \le e^{0.1} (1.1)^2$

$2(1.1) \le (1.1)^2$

$|f_{xxy}| = |2e^x y \cos(z)| \le \boxed{2e^x \cdot |y|} \le e^{0.1} \cdot 2.(1.1)$

$|f_{xxz}| = |-e^x y^2 \sin(z)| \le e^x \cdot y^2$

$|f_{xyy}| = |2e^x \cos(z)| \le 2e^x \le 2 \cdot e^{0.1}$

$2 < 2 \cdot (1.1)$

$|f_{xyz}| = |-2ye^x \sin(z)| \le \boxed{2|y|e^x}$

$|f_{xzz}| = |-e^x y^2 \cos(z)| \le e^x \cdot |y^2|$

$|f_{yyy}| = 0 \quad = 0$

$|f_{yyz}| = |-2e^x \sin(z)| \le 2 \cdot e^x$

$|f_{yzz}| = |-2ye^x \cos(z)| \le \boxed{2|y|e^x}$

$|f_{zzz}| = |e^x y^2 \sin(z)| \le e^x \cdot y^2$

Alle diese Beträge sind $\le$

$e^{0.1} \cdot (2.2) = C$

Nebenrechnung

$-0.1 \le x \le 0.1$

$0.9 \le y \le 1{,}1$

$e^x \le e^{0.1}$

$y^2 \le (1.1)^2$

da $|y| \le 1.1$.

$$|R_2(x,y,z)| = |f(x,y,z) - T_2(x,y,z)|$$

$$\le \frac{3^3}{(3)!} \Bigg(\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty}_{1/10} \Bigg)^3 \cdot C = \frac{3^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot e^{0.1} \cdot (2.2)$$

$$\le \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10} e^{0.5} \cdot (1.1) \cdot \frac{2}{100}$$

$$\le \frac{9 \cdot \cancel{\sqrt{4}} \cdot (1.1)}{\cancel{2} \cdot 10} \cdot \frac{2}{100}$$

$$= \frac{9 \cdot 9}{10} \cdot \frac{2}{100} < \frac{2}{100}$$

$$f_{xxx} = e^x y^2 \cos(z)$$

$$f_{xxy} = 2ye^x \cos(z)$$

$$f_{xxz} = -e^x y^2 \sin(z)$$

$$f_{xyy} = 2e^x \cos(z)$$

$$f_{xyz} = -2e^x y \sin(z)$$

$$f_{xzz} = -e^x y^2 \cos(z)$$

$$f_{yyy} = 0,$$

$$f_{yyz} = -2e^x \sin(z)$$

$$f_{zzy} = -2e^x y \cos(z)$$

$$f_{zzz} = e^x y^2 \sin(z)$$

Aufgabe 2: Bestimmen und klassifizieren Sie die $\underbrace{\text{stationären Punkte}}_{\text{grad}=0}$ von

a) $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = 2020,$$

$$f(x,y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4 \quad 12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2020$$

$$= (x \quad y)\begin{pmatrix} -x+y \\ 3x-2y \end{pmatrix} - 4x + 12y + 2020 = \underline{-x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x + 12y + 2020}$$

Stationäre Punkte

$$\begin{cases} f_x: & -2x + 4y - 4 \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y: & 4x - 4y + 12 \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \quad + \quad 2x + 8 = 0 \quad \boxed{x = -4}$$

$$-16 - 4y + 12 = 0 \quad \boxed{y = -1}$$

Einziger stationärer Punkt: $P = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Klassifikation

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} : \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\det Hf(-4,-1)}_{\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0} = 8 - 4 \cdot 4 = 8 - 16 < 0$$

λ_1, λ_2 haben unterschiedliche Vorzeichen $\Rightarrow$ Die Hessematrix ist indefinit

$\Rightarrow$ Es liegt ein Sattelpunkt vor

b) $g(x,y) := x^2 - xy - x + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}$.

$$\operatorname{grad} g(x,y) \overset{!}{=} 0 \iff \begin{cases} g_x(x,y) = 2x - y - 1 = 0 \implies \boxed{2x - 1 = y} \\ g_y(x,y) = -x + y^3 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{y+1}{2}$

Einsetzen in zweite Gleichung

$$-\frac{y+1}{2} + y^3 + y^2 = 0 \iff -\frac{1}{2}(y+1) + y^2(y+1) = 0$$

$$\iff (y+1)\left(y^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\iff y_1 = -1 \quad \vee \quad y = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad y = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Kandidaten

P_1: $y_1 = -1 \implies x_1 = \frac{y_1 + 1}{2} = 0 \implies P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

P_2: $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$

P_3: $y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$

$$P_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \mp 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Klassifikation:

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3y^2 + 2y \end{pmatrix}$$

$$Hg(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det Hg(P_1) = 1 > 0$ und $(Hg)_{11} = 2 > 0$ $\Big\}$ $Hg(P_1)$ positiv definit $\implies$ Minimum in P_1

$$Hg(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\det Hg(P_2) = 3 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2} < 0$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \longrightarrow$ Sattelpunkt in P_2

$$Hg(P_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \implies \det Hg(P_3) = \underbrace{3 + 2\sqrt{2}}_{>5} - 1 > 0, \quad (Hg(P_3))_{11} > 0$$

$\Big\}$ $\implies$ positiv definit Minimum in P_3

c) $f(x,y) := x^2y^2 - 6x^2y + 8x^2 - 4y^2 + 24y + 30.$

$\operatorname{grad} f(x,y) \overset{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} f_x &: \quad 2xy^2 - 12xy + 16x = 0 \\ f_y &: \quad 2x^2y - 6x^2 - 8y + 24 = 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(y^2 - 6y + 8) = 2x(y-2)(y-4) = 0 \\ 2x^2(y-3) - 8(y-3) = (2x^2-8)(y-3) = 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 8 = 0 \qquad x = \pm 2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \lor y = 2 \lor y = 4 \\ \text{UND} \\ x = -2 \lor x = 2 \lor y = 3 \end{cases}$$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad P_{2,3} = \begin{pmatrix} \mp 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_{4,5} = \begin{pmatrix} \mp 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Kandidaten = stationäre Punkte

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - 12y + 16 & 4xy - 12x \\ 4yx - 12x & 2x^2 - 8 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,3) = \begin{pmatrix} 18 - 36 + 16 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $-2, -8$
beide negativ
$\Longrightarrow$ Maximum in P_1

$$Hf(-2 \quad 2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 16 & -16 + 24 \\ -16 + 24 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 64 = 0$
$\lambda = \pm 8$
$Hf(P_2)$ indefinit
$\Longrightarrow$ Sattelpunkt in P_2

$$Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(2,2) = 0 - 64 < 0$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Longrightarrow Hf(2,2)$ indefinit

Sattelpunkt in P_3

$$Hf(-2,4) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 16 & \underline{4(-2)4} - 12(-2) \\ -32 + 24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -32 + 24 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit

wie in P_3

Sattelpunkt

$$Hf(2,4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit

wie im P_2

Sattelpunkt