Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2020/2021

Blatt 2 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z.$

a) Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ von f in $\boldsymbol{x}^0 = (1,2,3)^\mathsf{T}$

$-x^2 - y^2 + 2x + z = -1^2 - 2^2 + 2\cdot 1 + 3 = 0$

Gradient von f: $(f_x \quad f_y \quad f_z)(x,y,z) = (-2x+2, -2y, 1)$

Gradient von f in $\boldsymbol{x}^0$. $\quad \operatorname{grad} f(1,2,3) = (-2+2, -2.2, 1)$

$= (0, -4, 1)$

b) Richtungsableitungen $D_{\boldsymbol{w}^{[j]}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $j = 1, 2, 3$,

$\boldsymbol{v}^{[1]} = (1,1,1)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{v}^{[2]} = (1,1,0)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{v}^{[3]} = (1,0,0)^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{w}^{[j]} := \frac{\boldsymbol{v}^{[j]}}{\|\boldsymbol{v}^{[j]}\|}$.

Können Sie für $j = 1, 2, 3$ entscheiden, ob es sich bei $\boldsymbol{w}^{[j]}$ um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

$$D_{w^{[1]}} f(x^0) = \left\langle \operatorname{grad} f(x^0), \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3)$$

$< 0 \rightarrow w^{[1]}$ ist Abstiegsrichtung in x^0

$$D_{w^{[2]}} f(x^0) = \left\langle \operatorname{grad} f(x^0), \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{-4}{\sqrt{2}} < 0$$

$\Longrightarrow w^{[2]}$ Abstiegsrichtung

$$D_{w^{[3]}} f(x^0) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$\Longrightarrow$ keine Aussage bzgl. Abstieg/Aufstieg

Aber:
$$f(x^0 + \Delta x \cdot v^{[3]}) - f(x^0) = \underbrace{f\begin{pmatrix}1+\Delta x\\2\\3\end{pmatrix}} - \underbrace{f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}$$

$$= \underbrace{\left[-(1+\Delta x)^2 - \cancel{4} + 2(\cancel{1}+\Delta x) + \cancel{3}\right]} - \underbrace{\left[-1^2 - \cancel{4} + \cancel{2} + \cancel{3}\right]}$$

$$= -(\cancel{1} + \cancel{2\Delta x} + (\Delta x)^2) + \cancel{2\Delta x} + \cancel{1} = -(\Delta x)^2 < 0 \qquad \Delta x \neq 0$$

$v^{[3]} = w^{[3]}$ ist ebenfalls Abstiegsrichtung

c) $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}\,(0,-4,1)^\mathsf{T}$:

$$D_{\tilde{v}} f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \tilde{v}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}} (16+1) = \sqrt{17} > 0 \quad \text{Aufstiegsrichtung!}$$

Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?

Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\tilde{\boldsymbol{v}}$. $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2\cancel{\sqrt{17}}}{\cancel{\sqrt{17}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = x^{[1]}$

$f(x^{[1]}) = -1^2 - (-6)^2 + 2 \cdot 1 + 5 = -30$

Ergibt sich ein Widerspruch? $f(x^0) = 0 \qquad f(x^{[1]}) < f(x^0)$

Funktionswert in $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}$. $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\cancel{\sqrt{17}}}{\cancel{\sqrt{17}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/2 \end{pmatrix} = x^{[2]}$

$f(x^{[2]}) = -1^2 - 0^2 + 2 \cdot 1 + 7/2 = 9/2 > 0 = f(x^0)$

Erklärung:

$\hookrightarrow$ Aussagen über Aufstiegs-/Abstiegsrichtungen gelten in der Regel nur lokal

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(\overset{x_1}{x}, \overset{x_2}{y}) := \left(\overset{f_1}{\frac{-y}{r^{2\alpha}}}, \overset{f_2}{\frac{x}{r^{2\alpha}}} \right)^{\mathsf{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 \,.$$

$$= \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^\alpha}, \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} \right)^{T}$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei wird?

Lösung zu a) f quellenfrei: $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\overset{2}{n}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in D$

$$\operatorname{div} f(x,y) = (f_1)_x + (f_2)_y \overset{!}{=} 0$$

$$(f_1(x,y))_x = \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \right)_x = \frac{-\alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1} \overbrace{(x^2+y^2)_x}^{2x} (-y)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = \frac{2\alpha x y (x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$(f_2(x,y))_y = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} \right)_y = \frac{-\alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1} \, 2y \cdot x}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = \frac{-2xy\alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$\operatorname{div} f(x,y) = (f_1)_x + (f_2)_y = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

ist das Vektorfeld quellenfrei

Das Vektorfeld heißt *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt. Wobei

im Fall $n = 3$: $$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} =$$

und im Fall $n = 2$ (nach Einbettung im $\mathbb{R}^3$)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \iff (f_2)_x - (f_1)_y = 0.$

$$(f_2)_x = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} \right)_x = \frac{(x^2+y^2)^\alpha - \alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$(f_1)_y = \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \right)_y = \frac{-1 \cdot (x^2+y^2)^\alpha - \alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2y\,(-y)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$f_2(x) - f_1(y) = \frac{2(x^2+y^2)^\alpha - \alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2\,(x^2+y^2)^1}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \frac{(x^2+y^2)^\alpha\,[2 - 2\alpha]}{\text{Nenner}} \overset{!}{=} 0 \overset{\binom{x}{y} = \binom{0}{0}}{\iff} 2 - 2\alpha = 0$$

wirbelfrei $\iff$ rot $= 0$ genau dann wenn $\alpha = 1$

b) Gegeben ist $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z, y^2 + 2z + 5x, z^2 + 3x + 6y)^{\mathsf{T}}$.

Berechnen Sie die Ausdrücke $\operatorname{grad}(\text{div}\,\boldsymbol{f})$ bzw. $\text{rot}(\text{div}\,\boldsymbol{f})$, bzw. $\text{rot}\,(\text{rot}\,\boldsymbol{f})$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwinded.

$$\operatorname{div} f = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z = 2x + 2y + 2z$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}(f)) = ((\operatorname{div} f)_x, (\operatorname{div} f)_y, (\operatorname{div} f)_z) = (2, 2, 2)$$

$\operatorname{rot}(\operatorname{div}(f))$ ist nicht definiert da $\operatorname{div}(f) \in \mathbb{R}^1$

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(f)) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rot} \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\tilde{f})) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$