Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WiSe 2020/2021

Blatt 1 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x, y) = (3x - 5y)^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x-5y)^4 = 4(3x-5y)^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(3x-5y)}_{3-0} = 12(3x-5y)^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x-5y)^4 = 4(3x-5y)^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(3x-5y)}_{0-5} = -20(3x-5y)^3$$

$$\operatorname{grad} h(x,y) = (h_x, h_y) = \left(12(3x-5y)^3, -20(3x-5y)^3\right)$$

$$= (3x-5y)^3 \, (12, -20)$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)}$$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x} \cdot e^{-(x^2+y^2)}\right) = \frac{-y}{x^2} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(-(x^2+y^2)\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{-y}{x^2} - 2y\right)$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x} \cdot e^{-(x^2+y^2)}\right) = \frac{1}{x} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} (-2y)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{1}{x} - 2\frac{y^2}{x}\right)$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{-y}{x^2} - 2y, \ \frac{1}{x} - 2\frac{y^2}{x}\right)$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \frac{\sin(xyz)}{x^2}$$

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (g_x, g_y, g_z)(x,y,z)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$g_x(x,y,z) = \left(\frac{\cos(xyz)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y \cdot z)}_{y \cdot z} \cdot x^2 - \sin(xyz)\, 2x}{x^4} \right)$$

$$= \frac{\cos(xyz)\, yz\, x^{2} - 2x \sin(xyz)}{x^4} = \frac{\cos(xyz)\, xyz - 2\sin(xyz)}{x^3}$$

$$g_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2} \cdot \sin(xyz)} \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \cos(xyz) \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(xyz)}_{xz} = \frac{\cancel{x} z}{x^{\cancel{2}}} \cos(xyz)$$

$$g_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2} \sin(xyz)} \right) = \frac{xy}{x^2} \cos(xyz)$$

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (g_x, g_y, g_z) = \left(\frac{\cos(xyz)\, xyz - 2\sin(xyz)}{x^3}, \frac{z}{x}\cos(xyz), \frac{y}{x}\cos(xyz) \right)$$

$$l : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad l(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{d}{dz} \arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{y}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} \longleftarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$x \cdot (-y^{-2})$$

$$= \frac{-x}{y^2+x^2}$$

$$\operatorname{grad} l(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}(y, -x)$$

Aufgabe 2:

In einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter existiere die Bohrung $(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \le R^2$. Eine Spannungsquelle bewirke außerhalb der Bohrung das elektrische Potential

$$\boxed{\Phi(x, y, z) := -E_0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right) .}$$

Für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ gilt dann innerhalb der Bohrung $\boldsymbol{J} = 0$ und außerhalb der Bohrung

$$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla \Phi,$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix}$$

$\kappa =$ spezifische Leitfähigkeit des Leiters.

Berechnen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{J}$ und die Quelldichte div $\boldsymbol{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z$.

Also Φ_x, Φ_y, Φ_z berechnen $\to J$

$$\Phi(x,y,z) := -E_0\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}R^2\right) .$$

$$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi,$$

$$\Phi_x(x,y,z) = -E_0\left(1 + R^2\,\frac{1\cdot(x^2+y^2) \overset{-2x^2}{-\, x\cdot 2x}}{(x^2+y^2)^2}\right) = -E_0\left(1 + R^2\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\Phi_y(x,y,z) = -E_0\left(0 + R^2\,\frac{0 - x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = -E_0 R^2\,\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Phi_z(x,y,z) = 0\cdot(-E_0)$$

✗ $$J = \kappa E = \kappa(-\nabla\Phi) = -\kappa\begin{pmatrix}\Phi_x\\ \Phi_y\\ \Phi_z\end{pmatrix} = \overset{+}{\cancel{-}}\, E_0\kappa\begin{pmatrix}1 + R^2\,\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ R^2\,\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J_1\\ J_2\\ J_3\end{pmatrix}$$

Vorzeichenfehler im Video

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z.$$

Im Video vergessen! Sorry!

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\pm E_0 \left(1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \kappa \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\pm E_0 R^2 \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \kappa \right) + \frac{\partial}{\partial z}(0)$$

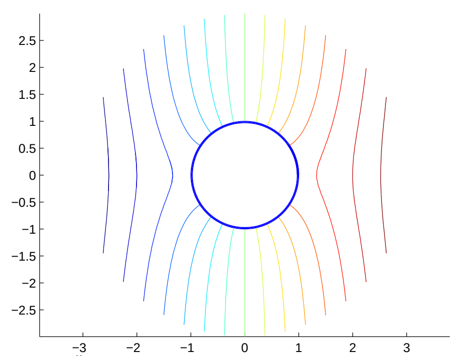
$$= \pm E_0 R^2 \kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \pm E_0 R^2 \kappa \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) + 0$$

$$= \pm E_0 R^2 \kappa \left[\frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)\, 2(x^2+y^2)\, 2x}{(x^2+y^2)^4} + \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - \left(-2xy \cdot 2(x^2+y^2)^1\, 2y\right)}{(x^2+y^2)^4} \right]$$

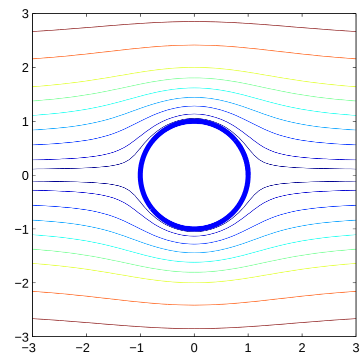
$$= \pm E_0 R^2 \kappa \, (-2x) \frac{\left[\cancel{(x^2+y^2)}(x^2+y^2) + 2\cancel{(x^2+y^2)}(y^2-x^2) + \cancel{(x^2+y^2)}(x^2+y^2) \mp 4y^2 \cancel{(x^2+y^2)^1} \right]}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \pm E_0 R^2 \kappa \underbrace{}_{-2x} \left[\frac{x^2 + y^2 + 2y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 \mp 4y^2}{(x^2+y^2)^3} \right]$$

$$= \pm E_0 R^2 \kappa \underbrace{}_{-2x} \frac{0}{(x^2+y^2)^3} = 0$$



Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung



Umströmung einer Kreisbohrung