

# **Blatt 1 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

## **Hausaufgaben**

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 1, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = (3x - 5y)^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x - 5y)^4 = 4(3x - 5y)^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (3x - 5y)}_{3-0} = 12(3x - 5y)^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x - 5y)^4 = 4(3x - 5y)^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (3x - 5y)}_{0-5} = -20(3x - 5y)^3$$

$$\begin{aligned} \text{grad } h(x, y) &= (h_x, h_y) = \left( 12(3x - 5y)^3, -20(3x - 5y)^3 \right) \\ &= (3x - 5y)^3 (12, -20) \end{aligned}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = \frac{-y}{x^2} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-(x^2+y^2))$$

$$= \frac{-y}{x^2} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = e^{-(x^2+y^2)} \left( \frac{-y}{x^2} - 2y \right)$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = \frac{1}{x} e^{-(x^2+y^2)} + \frac{y}{x} e^{-(x^2+y^2)} (-2y)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)} \left( \frac{1}{x} - 2 \frac{y^2}{x} \right)$$

$$\text{grad } f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \left( \frac{-y}{x^2} - 2y, \frac{1}{x} - 2 \frac{y^2}{x} \right)$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = \frac{\sin(xyz)}{x^2}$$

$$\text{grad } g(x, y, z) = (g_x, g_y, g_z)(x, y, z)$$

$$g_x(x, y, z) = \left( \frac{\cos(xyz) \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \overbrace{y \cdot z}^{y \cdot z}) \cdot x^2 - \sin(xyz) 2x}{x^4} \right)$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\cos(xyz) yz x^2 - 2x \sin(xyz)}{x^4} = \frac{\cos(xyz) x yz - 2 \sin(xyz)}{x^3}$$

$$g_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2} \cdot \sin(xyz) \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \cos(xyz) \frac{\partial}{\partial y}(xyz) = \frac{1}{x^2} \cdot \cos(xyz) \cdot xz = \frac{z}{x} \cos(xyz)$$

$$g_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{x^2} \sin(xyz) \right) = \frac{xy}{x^2} \cos(xyz)$$

$$\text{grad } g(x, y, z) = (g_x, g_y, g_z) = \left( \frac{\cos(xyz) x yz - 2 \sin(xyz)}{x^3}, \frac{z}{x} \cos(xyz), \frac{y}{x} \cos(xyz) \right)$$

$$l : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{d}{dz} \arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{y + \frac{x^2}{y}} \cdot \frac{y}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2} \quad \leftarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{-x}{y^2 + x^2} \quad \rightarrow$$

$$\text{grad } l(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} (y, -x)$$

## Aufgabe 2:

In einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter existiere die Bohrung  $(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq R^2$ . Eine Spannungsquelle bewirke außerhalb der Bohrung das elektrische Potential

$$\Phi(x, y, z) := -E_0 \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right).$$

Für die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J}$  gilt dann innerhalb der Bohrung  $\mathbf{J} = 0$  und außerhalb der Bohrung

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi,$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

$\kappa$  = spezifische Leitfähigkeit des Leiters.

Berechnen Sie die Stromdichte  $\mathbf{J}$  und die Quelledichte  $\operatorname{div} \mathbf{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z$ .

Also  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$   
berechnen  $\rightarrow \mathbf{J}$

$$\Phi(x, y, z) := -E_0 \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right).$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi,$$

$$\phi_x(x, y, z) = -E_0 \left( 1 + R^2 \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -E_0 \left( 1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\phi_y(x, y, z) = -E_0 \left( 0 + R^2 \frac{0 - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -E_0 R^2 \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\phi_z(x, y, z) = 0. \quad (-E_0)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \kappa (-\nabla \Phi) = -\kappa \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \frac{+}{-} E_0 \kappa \begin{pmatrix} 1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ R^2 \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

Vorzeichenfehler  
im Video

$$\operatorname{div} \mathbf{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z.$$

*Im Video vergessen! Sorry!*

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \overset{+}{-} E_0 R^2 \left( 1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) k \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \overset{+}{-} E_0 R^2 \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} k \right) + \frac{\partial}{\partial z} (0)$$

$$= \overset{+}{-} E_0 R^2 k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) + \overset{+}{-} E_0 R^2 k \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) + 0$$

$$= \overset{+}{-} E_0 R^2 k \left[ \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2) \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2xy \cdot 2(x^2 + y^2)^1 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^4} \right]$$

$$= \overset{+}{-} E_0 R^2 k \frac{-2x \left[ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)(y^2 - x^2) + (x^2 + y^2)(x^2 + y^2) - 4y^2(x^2 + y^2)^1 \right]}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \overset{+}{-} E_0 R^2 k \frac{-2x \left[ x^2 + y^2 + 2y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 4y^2 \right]}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \overset{+}{-} E_0 R^2 k \frac{0}{(x^2 + y^2)^3} = 0$$

