Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Integral $\int_D (\, x^3 \,+\, xy^2 \,+\, y\,)\, d(x,y)$

über den Viertelkreisring

$$D := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\, 4 \,\le\, x^2+y^2 \,\le\, 9, \quad x \ge\, 0\,, \quad y \ge\, 0\right\}.$$

Lösung zur Aufgabe 1:

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$D := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\; x = r\cos(\varphi),\, y = r\sin(\varphi), 2 \le r \le 3,\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

und

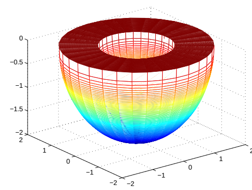
$$\int\limits_D (\, x^3 \,+\, xy^2 \,+\, y\,)\, d(x,y) = \int\limits_2^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r^3(\cos^3(\varphi) + \sin^2(\varphi)\cos(\varphi)) + r\sin(\varphi))\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \int\limits_2^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + r^2\sin(\varphi))d\varphi\, dr = \int\limits_2^3 r^4\,\left[\sin(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + r^2\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dr$$

$$= \int\limits_2^3 r^4 \,+\, r^2\, dr = \left[\frac{r^5}{5} \,+\, \frac{r^3}{3}\right]_2^3 = \frac{243-32}{5} \,+\, \frac{27-8}{3} \,=\, \frac{211}{5} \,+\, \frac{19}{3} \,=\, 48{,}5\bar{3}.$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die mit einer Flüssigkeit gefüllte Kugelschale

$$D := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3;\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \le 0 \right\}.$$



In der Flüssigkeit befinden sich schwebende Teilchen eines Stoffes S. Die Dichte des Stoffes S beträgt

$$\rho(x,y,z) = -z\,.$$

Berechnen Sie die Masse des Stoffes S in D.

Hinweis: $2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

Lösungsskize zur Aufgabe 2:

Kugelkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$1 \le r^2 = x^2+y^2+z^2 \le 4 \implies r \in [1,2]$

$z = r\sin\theta \le 0 \implies \theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0]$

Keine weitere Einschränkung : $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\int_D -z\,d(x,y,z) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^0 -r\sin(\theta)\,(r^2\cos(\theta))d\theta\,d\varphi\,dr \\
&= -\int_1^2 \int_0^{2\pi} r^3 \int_{\frac{-\pi}{2}}^0 \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta\,d\varphi\,dr = -\int_1^2 \int_0^{2\pi} r^3 \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_{\frac{-\pi}{2}}^0 d\varphi\,dr \\
&= -\int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{-1}{4} - \frac{1}{4}\right] d\varphi\,dr \\
&= \pi \int_1^2 r^3\,dr = \pi\left[\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right] = \pi\,\frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 25.01.– 29.01.21