Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Alte Klausuraufgaben)

a) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

b) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c}\ :\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Lösung:

a) **[4 Punkte]**

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) - t\cdot\sin(t) \\ \sin(t) + t\cdot\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

$$\int_1^3 < K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_1^3 (\cos^2(t) - t\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + t\sin(t)\cos(t) + t^2)\,dt$$

$$= \int_1^3 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

b) (i) $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2 \implies$ es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}$.

$\phi(x,y) \;=\; xy^2$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{g}$. [2 Punkte]

(ii)

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} \;=\; \int_0^{2\pi} <\; \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) \;>\; dt$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} \;&=\; \int_0^{2\pi} t^2(\cos t - \sin t)\, dt \\ &=\; t^2(\cos t + \sin t)\,\Big|_0^{2\pi} \;-\; \int_0^{2\pi} 2t(\cos t + \sin t)\, dt \\ &=\; 4\pi^2 -\; [\,2t(\sin t - \cos t)]_0^{2\pi} \;+\; \int_0^{2\pi} 2(\sin t - \cos t) dt = 4\pi^2 + 4\pi\,. \quad \text{[3 punkte]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} \;&=\; \int_0^{2\pi} <\; \boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) \;>\; dt \\ &= \phi(\cos(2\pi), 2\pi) \;-\; \phi(\cos(0), 0) \;=\; 4\pi^2\,. \quad \text{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Aufgabe 2)

Gegeben sind die Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]} : D \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2$ bzw. 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{[1]}(x,y) &= (x^3, y^3)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2,\\
\boldsymbol{v}^{[2]}(x,y,z) &= (xy^2 + xz^2\,,\, yx^2 + yz^2\,,\, zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[3]}(x,y,z) &= (-y^2\,,\, xy\,,\, -2y)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \backslash \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\z\end{smallmatrix}\right) \; ; z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$c(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big) \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Prüfen Sie, welche der Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3, 4$ Potentiale besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential.

c) Berechnen Sie zu $v^{[1]}(x,y)$ die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c}(t) = \left(t(t-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right)^T, \qquad t \in [a,b] := [0,4].$$

von $c(0)$ nach $c(4)$ zu bewegen.

Lösung:

a) Für $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ erhält man

$$\int_C \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} > dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0\,.$$

b) (i) rot $(\boldsymbol{v}^{[1]}) = 0$.

Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[1]}$. Dann gilt

$$\Phi_x = x^3 \iff \Phi(x,y) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c(y) \implies \Phi_y = c'(y).$$

Andererseits muss für jedes Potential $\Phi_y = y^3$ gelten. Also

$c'(y) \stackrel{!}{=} y^3$ z.B. $c(y) = \dfrac{1}{4}y^4$.

$\phi = \dfrac{1}{4}(x^4 + y^4)$ ist ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[1]}$.

(ii) Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[2]}$. Dann gilt

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2, \quad \Phi_y = yx^2 + yz^2, \quad \Phi_z = zy^2 + zx^2.$$

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2 \iff \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2\right) + c(y,z)$$

$$\Phi_y = yx^2 + c_y(y,z) = yx^2 + yz^2 \iff c_y(y,z) = yz^2$$

$$\iff c(y,z) = \frac{1}{2}y^2z^2 + d(z) \Longrightarrow \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right) + d(z)$$

$$\Phi_z = zx^2 + zy^2 + d_z = zx^2 + zy^2 \Longrightarrow d_z = 0 \Longrightarrow d = Konst.$$

Also haben wir mit $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$ ein Potential für $v^{[2]}$ gefunden.

(iii) Es gilt $\dfrac{\partial(v_1^{[3]})}{\partial y} = -2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial(v_2^{[3]})}{\partial x} = y$ es gibt also kein Potential zu $\boldsymbol{v}^{[3]}$.

(iv) Es gilt zwar $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[4]}) = 0$. Hieraus lässt sich aber nicht schließen, dass $\boldsymbol{v}^{[4]}$ ein Potential besitzt. Der Definitionsbereich ist nicht einfach zusammenhängend. Aus Teil a) folgt, dass es kein Potential gibt.

c)

$$\int_C K(x,y)d(x,y) = \phi(c(4)) - \phi(c(0)) = \phi\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 4^3 = 64$$

Bearbeitungstermine: 25.01.– 29.01.21