Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Durch die Relation $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben. Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (+ Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Lösung:
Wegen $g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y) = g(-x,-y)$ ist die Kurve symmetrisch zur $y-$ Achse, zur $x-$ Achse und zum Ursprung.

i) Singuläre Punkte:

$g_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \lor x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$

Kandidaten: $P_0 = \binom{0}{0}$, $P_1 = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$, $P_2 = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$

Für P_0 gilt $g(P_0) = 0$. Es handelt sich also um einen singulären Punkt.

Wegen $g(P_{1,2}) = -\frac{1}{4} \neq 0$ liegen die anderen zwei Kandidaten nicht auf der Kurve.

Zur Klassifikation des singulären Punktes P_0 berechnet man die zweiten Ableitungen:

$g_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2$, $g_{xy}(x,y) = 0$, $g_{yy}(x,y) = 2$

und die Hessematrix im singulären Punkt: $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Da diese indefinit ist, handelt es sich um einen Doppelpunkt.

ii) Punkte mit horizontaler Tangente:Wir haben bereits oben berechnet

$g_x = 0,\ g_y \neq 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \land y \neq 0$.

Zu erfüllen bleibt noch $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y) = -\frac{1}{4} + y^2 = 0$

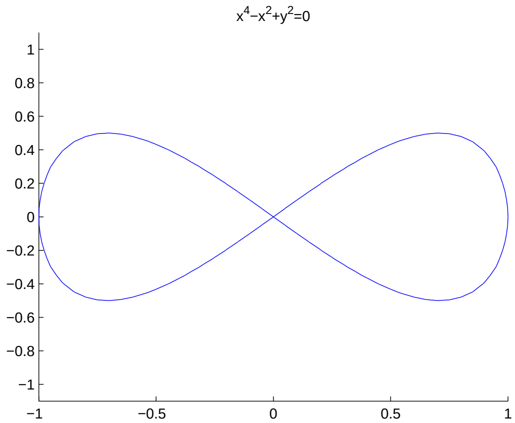
Damit erhält man die Punkte $P_{3,4} = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$ und $P_{3,4} = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$

iii)Punkte mit vertikaler Tangente:

Aus i) wissen wir $g_y = 0 \iff y = 0$. Der Punkt muss auf der Kurve liegen,also:

$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \lor \quad x = \pm 1$

Der Punkt $\binom{0}{0}$ ist ein singulärer Punkt. Punkte mit vertikaler Tangente sind also $P_{7,8} = \binom{\pm 1}{0}$


x4−x2+y2=0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x,y,z) \quad = \quad x^2 + y^2 - 8 \quad = \quad 0$$

mit der Ebene

$$h(x,y,z) \quad = \quad x - y + 2z - 1 \quad = \quad 0.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung 2:
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + z^2 \stackrel{!}{=} \min / \max \\ g(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ h(x,y,z) &= x - y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Regularitätsbedingung : [2 Punkte]

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

erfüllt $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(0,0,z) = -8 \neq 0 \Rightarrow$ Punkte mit $x = y = 0$ sind nicht zulässig.
Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Zu lösen: [2 Punkte]

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f + \lambda g + \mu h) &= 0 \\ g = h &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} y & + & \lambda \cdot 2x & + & \mu & = & 0 \\ x & + & \lambda \cdot 2y & - & \mu & = & 0 \end{array}\right\} \quad y + 2\lambda x + x + 2\lambda y = 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2z & + & \lambda \cdot 0 & + & 2\mu & = & 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\mu = -z} \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 & \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{1}{2}(1 - x + y)} \\ & & x^2 & + & y^2 & = & 8 & \end{array}$$

Neues System : [1 Punkt]

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda)(x + y) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y \ \vee \ \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2\lambda x + y - \frac{1}{2}(1 - x + y) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}$$

Berechnung $P_1, \cdots P_4$ **: [3 Punkte]**

1. Fall $y = -x$:

$$\begin{aligned} 2\lambda x - x - \frac{1}{2}(1-x-x) &= 0 \\ x^2 + x^2 &= 8 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \quad z = \frac{1}{2}(1-2x) \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(P_1) = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \qquad f(P_2) = -4 + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

2. Fall $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, Noch zu erfüllen: $\left\{ \begin{aligned} -x + y - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned} \right.$

$-x + y = 1 \qquad \boxed{y = 1 + x}$

$z = \dfrac{1}{2}(1 - x + y) = 1 \qquad \boxed{z = 1}$

$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2x + 1 = 8 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 7 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+14}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, \qquad y = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{15} \\ 1 + \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{15} \\ 1 - \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(P_3) &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - 1\right)\left(\sqrt{15} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{1}{4}(15 - 1) + 1 = \frac{9}{2} \\ f(P_4) &= \frac{1}{4}\left(-\sqrt{15} + 1\right)\left(-\sqrt{15} - 1\right) + 1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Der Schnitt eines Zylindermantels mit einer (nicht zur Achse paralellen) Ebene ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ Max/Min werden angenommen.[**1 Punkt**]

Es liegen globale Maxima in P_3 und P_4 und ein globales Minimum in P_1 vor. [**1 Punkt**]

Abgabetermine: 11.01.– 15.01.21