Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Bestimmen Sie die Minima von} \quad & f(x,y) \;=\; xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 \le 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2 + 4y^2 - 8 < 0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \; x^2 + 4y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Lösung: (Angegebene Punkteverteilung aus alter Klausuraufgabe übernommen)
a) Notwendige Bedingung für Minimum im Innern:

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = (y,\, x) = 0\;, \qquad \text{also} \qquad x = y = 0\,. \;\textbf{[1 Punkt]}$$

Hinreichende Bedingung überprüfen:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \;\Rightarrow\; \text{kein Minimum.} \;\textbf{[1 Punkt]}$$

b) Regularitätsbedingung:

$\mathbf{grad}\, g(x,y) = (2x, 8y) \neq (0,0)^T$ auf der zulässigen Menge erfüllt. **[1 Punkt]**

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\, F(x,y) = \mathbf{grad}\,(f(x,y) + \lambda g(x,y)) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}^T + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 \qquad\qquad &= 0\,. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Gleichungssystem lösen:

$x \cdot I\ : \qquad xy + 2\lambda x^2 = 0$

$y \cdot II : \qquad xy + 8\lambda y^2 = 0$

Bildet man die Differenz dieser Gleichungen, folgt

$\lambda(8y^2 - 2x^2) = 0 \implies \lambda = 0 \vee x^2 = 4y^2\,.$

$\lambda = 0$ liefert (eingesetzt in die ursprünglichen Gleichungen) den unzulässigen Punkt $(0,0)$.

Also muss $x^2 = 4y^2$ gelten. Dies eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt:

$x^2 + 4y^2 = 4y^2 + 4y^2 \overset{!}{=} 8 \implies y = \pm 1\,.$

Und damit $x^2 = 4y^2 = 4$, also $x = \pm 2$.

Wir erhalten also vier Kandidaten für lokale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Kandidaten : [**3 Punkte**]

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = -2$ und $f(P_3) = f(P_4) = 2$. Weil die stetige Funktion f auf dem Kompaktum

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 = 0\right\}$$

ihr Minimum annimmt, liegen in P_1 und P_2 globale Minima vor. Mit demselben Argument schließt man, dass in P_3 und P_4 globale Maxima vorliegen müssen. Sie scheiden daher als lokale Minima aus.
[**2 Punkte**]

Alternativ, wenn auch unnötig aufwändig, könnte man hinreichende Bedingungen 2. Ordnung überprüfen.

c) Da auch

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 \le 0\right\}$$

kompakt ist, nimmt auch hier die Funktion f ihr Minimum an. Allerdings nicht im Innern (siehe a)). Also liegt das globale Minimum von f auf dem Rand. Wegen b) kommen dafür nur P_1 und P_2 in frage. Weil wiederum $f(P_1) = f(P_2) = -2$ gilt, liegen in beiden Punkten globale Minima für (1). [**1 Punkt**]

Aufgabe 2) Berechnen Sie

a) das Integral

$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1,3] \times [1,2],$$

b) das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; |x| \leq 1, \;\; -(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2, \;\; 0 \leq z \leq \big(1-x^2-y\big) \right\},$$

c) und das Integral

$$\int\int_{D_2} (x^2-y^4) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrien aus!

Lösung zu 2:

a)

$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1,3] \times [1,2]$$

$$\begin{aligned} I_1 := \int_1^2 \int_{-1}^3 xy^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 y^2 \int_{-1}^3 x \, dx \, dy \\ &= \left(\int_1^2 y^2 dy\right) \left(\int_{-1}^3 x \, dx\right) = \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^3 \;=\; 28/3. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V = \int_K 1 \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \int_0^{1-x^2-y} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} (1-x^2-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 2(1-x^2)^2 - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \mathrm{d}x \\ &= 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1 \\ &= 4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

c)
$$\int\int_{D_2} (x^2 - y^4) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

Zunächst beobachtet man, dass $f(x,y) = x^2 - y^4$ und D_2 achsensymmetrisch sowohl bzgl. der x-Achse als auch bzgl. der y-Achse sind. Ist also $\overline{D} = D_2 \cap$ (1.Quadrant), so gilt

$$I_2 := \int\int_{D_2} f(x,y)\, d(x,y) \;=\; 4 \cdot \int\int_{\overline{D}} f(x,y) d(x,y)\ .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} I_2 =& 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 - y^4 \, dy \, dx = 4 \int_0^1 \left. (x^2\, y - \frac{y^5}{5}) \right|_0^{1-x} dx \\ =& 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) - \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = 4 \left[\left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{(1-x)^6}{30} \right|_0^1 \right] \\ =& 4 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 0 - \left(0 - 0 + \frac{1}{30} \right) \right] = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 11.01.– 15.01.21