Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (6+4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$.

b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x,y,z) = f(x,y,z) - T_2(x,y,z)$ folgende Abschätzng gilt:

$$|R_2(x,y,z)| \le 0.02 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \le 0.1\,.$$

Lösung:

a)
$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z), \qquad f(0,1,\pi) = 2 + 1 + \cos(\pi) = 2\,.$$

$$\begin{aligned}
f_x &= z + e^x y^2 \cos(z), & f_x(0,1,\pi) &= \pi - 1\\
f_y &= 2y + 2ye^x \cos(z), & f_y(0,1,\pi)) &= 2 - 2 = 0\\
f_z &= x - e^x y^2 \sin(z), & f_z(0,1,\pi) &= 0 - 0 = 0\\
f_{xx} &= e^x y^2 \cos(z), & f_{xx}(0,1,\pi) &= -1\\
f_{xy} &= 2e^x y \cos(z), & f_{xy}(0,1,\pi) &= -2\\
f_{xz} &= 1 - e^x y^2 \sin(z), & f_{xz}(0,1,\pi) &= 1\\
f_{yy} &= 2 + 2e^x \cos(z), & f_{yy}(0,1,\pi) &= 2 - 2 = 0\\
f_{yz} &= -2ye^x \sin(z), & f_{yz}(0,1,\pi) &= 0\\
f_{zz} &= -e^x y^2 \cos(z), & f_{zz}(0,1,\pi) &= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(x,y,z) \;&=\; f(0,1,\pi) \;+\; f_x(0,1,\pi)(x-x_0) \;+\; f_y(0,1,\pi)(y-y_0) \;+\; f_z(0,1,\pi)(z-z_0) \\
&+\; \frac{1}{2}\,(x-x_0, y-y_0, z-z_0)Hf(0,1,\pi)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \\
&=\; 2 + x(\pi-1) + \frac{1}{2}\,(x, y-1, z-\pi)\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-\pi \end{pmatrix} \\
&= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}\,(x, y-1, z-\pi)\begin{pmatrix} -x-2(y-1)+(z-\pi) \\ -2x \\ x+(z-\pi) \end{pmatrix} \\
&= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}\left[-x^2 - 2x(y-1) + x(z-\pi) - 2x(y-1) + x(z-\pi) + (z-\pi)^2\right] \\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Alternativ rechnet man

$$
\begin{aligned}
T(x,y,z) \;&=\; f(0,1,\pi) \;+\; \operatorname{grad} f(0,1,\pi)^T \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-\pi \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2!}\,\big(f_{xx}(0,1,\pi)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,1,\pi)(x-0)(y-1) \\
&+ 2f_{xz}(0,1,\pi)(x-0)(z-\pi) + f_{yy}(0,1,\pi)(y-1)^2 \\
&+ 2f_{yz}(0,1,\pi)(y-1)(z-\pi) + f_{zz}(0,1,\pi)(z-\pi)^2\big) \\
&\quad 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Oder über Taylorreihen mit

$$
\cos(z) = -1 + \frac{1}{2}(z-\pi)^2 + \cdots, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots
$$

$$
y^2 = (y-1)^2 + 2(y-1) + 1
$$

b)

$$\begin{array}{ll}
f_{xxx} = e^x y^2 \cos(z), & |f_{xxx}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxy} = 2ye^x \cos(z), & |f_{xxy}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxz} = -e^x y^2 \sin(z), & |f_{xxz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xyy} = 2e^x \cos(z), & |f_{xyy}| \leq 2e^{0.1} \\
f_{xyz} = -2e^x y \sin(z), & |f_{xyz}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xzz} = -e^x y^2 \cos(z), & |f_{xzz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{yyy} = 0, & \\
f_{yyz} = -2e^x \sin(z), & |f_{yyz}| \leq 2e^{0.1} \\
f_{zzy} = -2e^x y \cos(z), & |f_{yzz}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{zzz} = e^x y^2 \sin(z), & |f_{zzz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1}
\end{array}$$

Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist zum Beispiel

$C := 4.4 = 2.2 \cdot 4^{0.5} \; > \; 2.2 \cdot e^{0.5} \; > \; 2.2 \cdot e^{0.1}\,.$

Als Schranke für den Fehler erhält man

$$|R_2(x,y,z)| \;\leq\; \frac{3^3}{3!} \cdot C \cdot \|\,\boldsymbol{x} \,-\, \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \;\leq\; \frac{9}{2} \cdot 4.4 \cdot 0.1^3 \;=\; \frac{9 \cdot 2.2}{1000} \;=\; \frac{19.8}{1000} \;<\; 0.02\,.$$

Aufgabe 2: [3+4+3 Punkte] Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) [Klausur 2009] $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = 2020,$$

b) $g(x,y) := x^2 - xy - x + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}$.

c) $f(x,y) := x^2y^2 - 6x^2y + 8x^2 - 4y^2 + 24y + 30$.

Lösung zu 2:

a)

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4,12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2020 = -x^2+4xy-2y^2-4x+12y+2020\,.$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x+4y-4 = 0 \iff x = 2y-2. \\ f_y(x,y) &= 4x-4y+12 = 8y-8-4y+12 = 0 \\ &\iff y = -1 \implies x = -4. \end{aligned}$$

Die Hessematrix $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(\boldsymbol{H}(x,y)) = 8 - 16 < 0$ ist indefinit. Also liegt ein Sattelpunkt vor.

b) Für g erhält man $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y-1 \\ -x+y^3+y^2 \end{pmatrix}$

$$2x-y-1 = 0 \iff x = \frac{y+1}{2}$$

$$-x+y^3+y^2 = -\frac{y+1}{2} + y^2(y+1) = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)(y+1) = 0$$

$$\implies y \in \{-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

Damit erhält man drei stationäre Punkte:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für die Hessematrix rechnet man:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= 2 \\ g_{xy}(x,y) &= g_{yx}(x,y) = -1 \\ g_{yy}(x,y) &= 3y^2 + 2y \end{aligned}$$

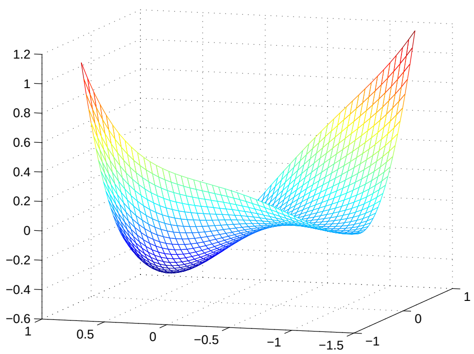
In den Punkten $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ erhält man die Hessematrizen

$$\boldsymbol{H}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]}_{11} = 2 > 0,\ \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 2 - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]} \text{ positiv definit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 3 - 2\sqrt{2} - 1 < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[2]} \text{ ist indefinit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]}_{11} = 2 > 0,\ \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 3 + 2\sqrt{2} - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]} \text{ positiv definit.}$$

In $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ liegen Minima vor. $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist ein Sattelpunkt.



c) $f(x,y) := x^2y^2 - 6x^2y + 8x^2 - 4y^2 + 24y + 30\,.$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy^2 - 12xy + 16x = 2x(y^2 - 6y + 8) = 2x(y-2)(y-4) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \vee y = 2 \vee y = 4. \\ f_y(x,y) &= 2x^2y - 6x^2 - 8y + 24 = (x^2 - 4)(2y - 6) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee y = 3. \end{aligned}$$

Wir haben also folgende Kandidaten:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_{2,3} = \begin{pmatrix} \mp 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_{4,5} = \begin{pmatrix} \mp 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Für die Hessematrix rechnet man:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) =& 2(y^2 - 6y + 8) \\ f_{xy}(x,y) =& 4x(y - 3) \\ f_{yy}(x,y) =& 2(x^2 - 4) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{H} f(0,3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H} f(0,3) \text{ negativ definit,} \Longrightarrow \text{Maximum}$$

$$\boldsymbol{H} f(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 64 \Longrightarrow \boldsymbol{H} f(-2,2) \text{ indefinit,} \Longrightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{H} f(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 64 \Longrightarrow \boldsymbol{H} f(2,2) \text{ indefinit,} \Longrightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{H} f(-2,4) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 64 \Longrightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{H} f(2,4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 64 \Longrightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Alternativ für die letzten vier Punkte: $\det \boldsymbol{H} f(...) < 0$.

Abgabetermine: 14.12.– 18.12.20