Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D:=[-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,]\times[-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,]\,\to\,\mathbb{R}$$

$$f(x,y)\;=\;8\cos(x+y)\;+\;\sin(x-y)\;+\;12xy\;+11x^2\;+8y^2\,.$$

a) Besitzt f auf D ein Minimum und ein Maximum?

b) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion f auf D indem Sie das Minimum des Taylorpolynoms zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)^T=(0,0)^T$ berechnen.
Hinweis: Sie brauchen für diese Aufgabe keine einzige Ableitung von f zu berechnen. Benutzen Sie die Taylor-Reihen von Cosinus und Sinus.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), dass der minimale Wert von f auf dem dort angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als 7.5 sein kann.

d) T_2 ist stetig auf D. Müsste man nicht auch ein Maximum von T_2 finden?

Lösungshinweise zu 1:

a) Da D abgeschlossen und beschränkt ist, und f stetig ist, besitzt f auf D ein globales Minimum und ein globales Maximum.

b) Die polynomialen Anteile von f werden exakt wieder gegeben. Wegen
$\cos(z)=1-\frac{z^2}{2}+O(z^4),\qquad \sin(z)=z+O(z^3)\,,$
erhält man ohne lange Rechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned}T_2(x,y)\;&=\;8-4(x+y)^2\;+\;(x-y)\;+\;12xy\;+11x^2\;+\;8y^2\\&=8+x-y+7x^2+4xy+4y^2\,,\end{aligned}$$

$$\operatorname{grad}T_2(x,y)\;=\;(14x+4y+1,\,8y+4x-1)^T=0\;\Longrightarrow\;x=-\frac{1}{8},\,y=\frac{3}{16}\,,$$

$$H\,T_2(x,y)\;=\;\begin{pmatrix}14&4\\4&8\end{pmatrix}\qquad 14>0\;\wedge\;14\cdot8-4\cdot4>0\quad\Longrightarrow\lambda_1>0,\,\lambda_2>0.$$

Im Punkt $P_0=(-\frac{1}{8},\,\frac{3}{16})^T$ liegt ein Minimum des Taylorpolynoms vor.

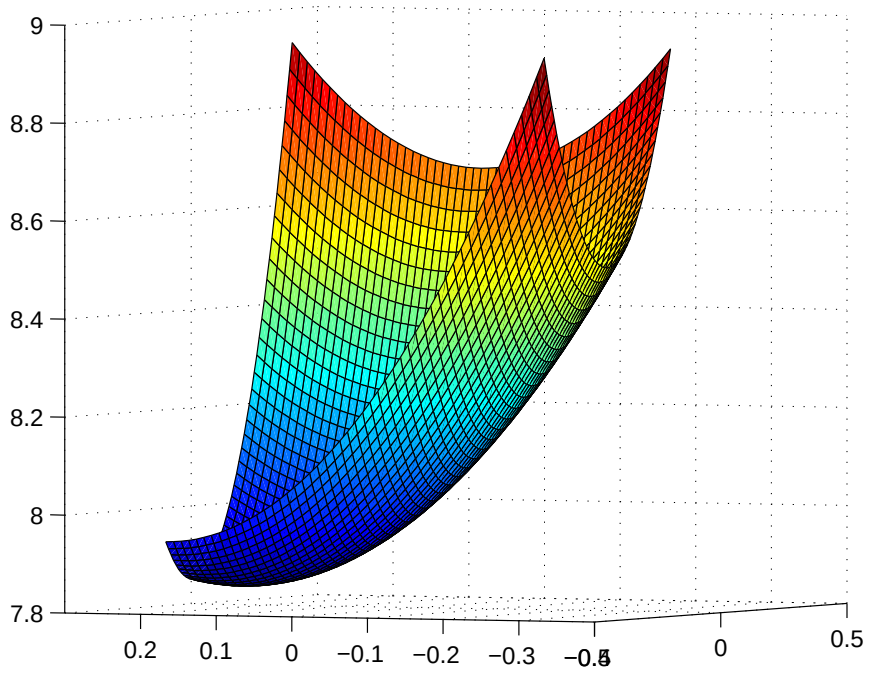
c) Die dritten Ableitungen haben alle die Form $8\sin(x+y) \pm \cos(x-y)$. Alle dritten Ableitungen sind also vom Betrag kleiner oder gleich 9. Es gilt daher

$$|R_2(x,y)| \leq \frac{(2^3)\cdot 9}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16}\,.$$

Somit gilt

$$f(x,y) \geq T_2(x_{min}, y_{min}) - \frac{3}{16} \geq T_2(-\frac{1}{8}, \frac{3}{16}) - \frac{3}{16} = 8 - \frac{5}{32} - \frac{3}{16} = 8 - \frac{11}{32}$$

d) Da T_2 stetig auf dem Kompaktum D ist, und es im Inneren von D kein Maximum gibt, muss das Maximum auf dem Rand liegen. Dieses könnte man durch die Lösung von vier Aufgaben (jeweils auf einer Kante) im $\mathbb{R}^1$ bestimmen.



Aufgabe 2) (Klausur 2009)

Zeigen Sie, dass durch

$$g(x,y) \;=\; y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 \;=\; 0$$

in der Umgebung von $P_0 = (-1,1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert ist. Es gilt also lokal

$$g(x,y) \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; y = f(x), \quad f(-1) = 1\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1\,.$

Zusatz zur Klausuraufgabe: Berechnen Sie $f'(-1)$ mittels impliziter Differentiation.

Lösung zu Aufgabe 2) $\qquad g(x,y) \;=\; y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 \;=\; 0$

Für $\qquad g_y(x,y) \;=\; 2yx - \exp(x+y) - y \cdot \exp(x+y)$

gilt $\qquad g_y(-1,1) \;=\; -2 - 1 - 1 = -4 \neq 0.$

Nach denm Satz über implizite Funktionen gibt es daher lokal eine Funktion f mit

$$g(x,y) \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; y = f(x), \quad f(-1) = 1\,.$$

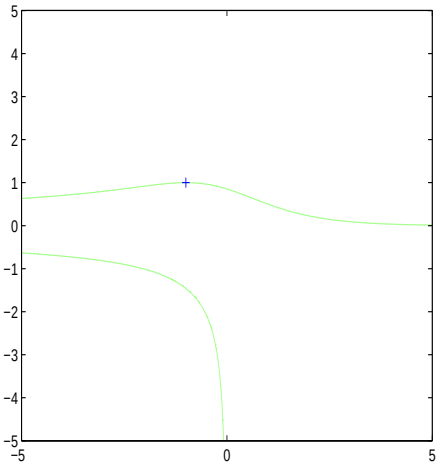
Es gilt

$$f'(x) = -g_x/g_y = -\frac{y^2 - y\exp(x+y)}{2xy - \exp(x+y) - y\exp(x+y)} \;\Longrightarrow$$

$$f'(-1) = \frac{1 - 1\exp(0)}{-4} = 0$$

und damit

$$T_1(x;-1) \;=\; f(-1) + \; f'(-1)(x+1) \;=\; 1\,.$$



Implizites Differenzieren: Auf der Lösungskurve gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\, g(x, y(x)) \;&=\; \frac{d}{dx}\,\big(y(x)^2 \cdot x - y(x) \cdot \exp(x + y(x)) + 2\big) \\ &=\; 2y(x)y'(x) \cdot x + y(x)^2 - y(x)' \cdot \exp(x + y(x)) - y(x) \cdot \exp(x + y(x)) \cdot (1 + y'(x)) \;=\; 0.\end{aligned}$$

Einsetzen von $x = -1$ und $y(-1) = 1$ ergibt:

$$-2y'(-1) + 1 - y'(-1) \cdot \exp(0) - \exp(0) \cdot (1 + y'(-1)) \;=\; -4y'(-1) \;= 0.$$

Also $f'(-1) \;=\; y'(-1) \;=\; 0\,.$

Bearbeitungstermine: 14.12.–18.12.20