Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 \ = \ f_2 \circ f_1$$

$$f_4 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^+ \ \times \ [0, 2\pi] \ \times \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ \to \ \mathbb{R}^3 \,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \cos\theta \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ c \cdot r \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

- $$J f_1 \ = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \det\, J f_1 = 2(x^2 - y^2).$$

  Die Determinante verschwindet für $y = \pm x$.

- $$f_2(u, v) \ = \ \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix}$$
  $$J f_2(u, v) \ = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det\, J f_2 = 2.$$

  Die Determinante verschwindet nie.

- $$Jf_3 \;=\; Jf_2 \cdot Jf_1 \;=\; \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

  $$\det\, Jf_3 = \det\, Jf_2 \cdot \det\, Jf_1 = 0 \Longrightarrow \det\, Jf_2 = 0 \vee \det\, Jf_1 = 0 \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

- $$Jf_4 \;=\; \begin{pmatrix} a\cos\phi\cos\theta & -ar\sin\phi\cos\theta & -ar\,\cos\,\phi\sin\theta \\ b\sin\phi\cos\theta & br\cos\phi\cos\theta & -br\,\sin\,\phi\sin\theta \\ c\sin\theta & 0 & cr\cos\theta \end{pmatrix}$$

  $$\det\, Jf_4 = \; a\cdot b\cdot c\left(\sin\theta\,\begin{vmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -r\,\cos\,\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & -r\,\sin\,\phi\sin\theta \end{vmatrix} \;+\; r\cos\theta\,\begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix}\right)$$

  $$\begin{aligned} &= a\cdot b\cdot c\cdot\sin\theta\;\big(r^2\,\sin\theta\,\cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\big) \\ &+\; a\cdot b\cdot c\cdot r\cos\theta\;\big(r\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\big) \\ &=\; a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \;=\; a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,, \end{aligned}$$

  Die Determinante verschwindet nur für $r = 0$ also im Ursprung oder $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2: [Alte Klausur, Struckmeier/Kiani, Aufgabe 1a]
Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x,y) \;=\; xy \;+\; \cos(x)\, e^y$$

mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x_0} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für alle

$$(x,y)^T \;\in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad |x| \;\le\; 0.05\,,\; |y| \;\le\; 0.2$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \;:=\; |\, f(x,y) \;-\; T_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \;\le 0.1\,.$$

.

Lösung zu Aufgabe 2: [Punkteangaben aus alter Klausur, Struckmeier/Kiani]

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) \;=\; xy \;+\; \cos(x)\, e^y & f(0,0) \;=\; 1 \\
f_x(x,y) \;=\; y - \sin(x)e^y & f_x(0,0) \;=\; 0 \\
f_y(x,y) \;=\; x + \cos(x)e^y & f_y(0,0) \;=\; 1 \\
f_{xx}(x,y) \;=\; -\cos(x)e^y & f_{xx}(0,0) \;=\; -1 \\
f_{xy}(x,y) \;=\; 1 - \sin(x)e^y & f_{xy}(0,0) \;=\; 1 \\
f_{yy}(x,y) \;=\; \cos(x)e^y & f_y(0,0) \;=\; 1
\end{array}$$

$$T_2(x,y) = 1 + y + \frac{1}{2}\,(y^2 + 2xy - x^2) \qquad \text{[3 Punkte]}$$

Dieses Ergebnis kann auch durch Einsetzen der Cosinus bzw. Exponentialreihe hergeleitet werden. Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen von f. Diese sind alle von der Form $(\pm\sin(x)$ bzw. $\pm\cos(x))\cdot e^y$. Damit folgt

$$|\text{ dritte Ableitungen }| \le e^{0,2} \;<\; \sqrt{e} \;<\; \sqrt{4} = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, |y| \le 0.2. \quad \text{[1 Punkt]}$$

und

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \;\le\; \frac{2^3}{3!}\,(0.2)^3 \cdot 2 = \frac{8\cdot 8}{3000} \;=\; \frac{64}{300}\cdot\frac{1}{10} \;<\; \frac{1}{10}\,. \quad \text{[1 Punkt]}$$

Bearbeitungstermine: 30.11.–04.12.20