Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$f\ :\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{y}{x}e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad h\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad h(x,y)=(3x-5y)^4$

$g\ :\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x,y,z)=\frac{\sin(xyz)}{x^2}$ $\qquad l\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad l(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

Lösung zur Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
f(x,y) :=& \frac{y}{x}e^{-(x^2+y^2)}\,,\\
f_x(x,y) =& \left(-\frac{y}{x^2}-2y\right)e^{-(x^2+y^2)}\\
f_y(x,y) =& \left(\frac{1}{x}-\frac{2y^2}{x}\right)e^{-(x^2+y^2)}\\
\mathbf{grad}\, f(x,y) =& e^{-(x^2+y^2)}\left(-\frac{y}{x^2}-2y\,,\,\frac{1}{x}-\frac{2y^2}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x,y) :=& (3x-5y)^4,\\
h_x(x,y) =& 12(3x-5y)^3, \qquad h_y(x,y) = -20(3x-5y)^3\\
\mathbf{grad}\, h(x,y) =& (3x-5y)^3\ (12,\ -20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= \frac{\sin(xyz)}{x^2} \\
g_x(x,y,z) &= \frac{\cos(xyz)\cdot yz}{x^2} - \frac{2\sin(xyz)}{x^3} \\
g_y(x,y,z) &= \frac{\cos(xyz)\cdot xz}{x^2} = \frac{\cos(xyz)\cdot z}{x} \\
g_z(x,y,z) &= \frac{\cos(xyz)\cdot xy}{x^2} = \frac{\cos(xyz)\cdot y}{x} \\
\mathbf{grad}\, g(x,y,z) &= (g_x, g_y, g_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(x,y) &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\ , \\
l_x(x,y) &= \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{y^2+x^2} \\
l_y(x,y) &= \frac{\frac{-x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{y^2+x^2} \\
\mathbf{grad}\, l(x,y) &= \frac{1}{y^2+x^2}\,(y,\,-x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

In einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter existiere die Bohrung $(x, y, z)^T \;:\; x^2 + y^2 \le R^2$. Eine Spannungsquelle bewirke außerhalb der Bohrung das elektrische Potential

$$\Phi(x, y, z) := -E_0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right) .$$

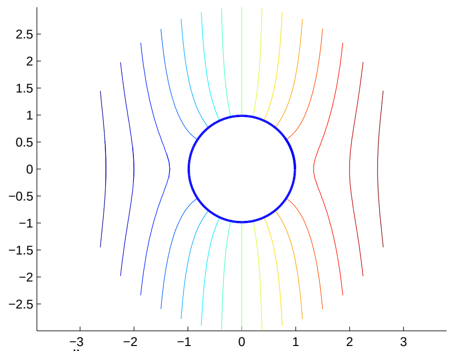
Für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ gilt dann innerhalb der Bohrung $\boldsymbol{J} = 0$ und außerhalb der Bohrung

$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}$, $\quad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$,

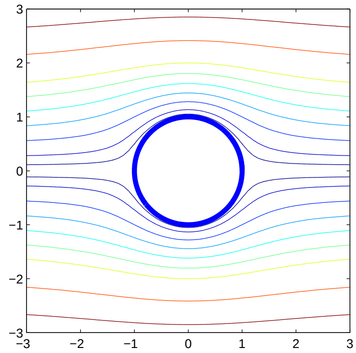
$\kappa =$ spezifische Leitfähigkeit des Leiters.

Berechnen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{J}$ und die Quelldichte

div $\boldsymbol{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z$.



Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung



Umströmung einer Kreisbohrung

Lösung zur Aufgabe2:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -E_0 \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right) = -E_0 \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -E_0 \left(\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ Potential und Stromdichte sind unabhängig von } z .$$

Für die Stromdichte gilt also

$$J = \kappa E_0 \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \\ \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (J_1)_x &= \kappa E_0 R^2 \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \kappa E_0 R^2 \frac{-2x(x^2 + y^2) - 2 \cdot 2x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \kappa E_0 R^2 \, 2x \frac{x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(J_2)_y &= -\,\kappa\,E_0\,R^2\,2x\,\frac{(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2y^2}{(x^2+y^2)^4} \\
&= -\,\kappa\,E_0\,R^2\,2x\,\frac{x^2+y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^3} = -\kappa\,E_0\,R^2\,2x\,\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3} = -(J_1)_x\,.
\end{aligned}
$$

Mit $(J_3)_z = 0$ folgt, dass die Divergenz verschwindet. Das Feld ist quellenfrei.

Das erste Bild ist wie folgt entstanden

```
hold on
axis equal
[r,phi] = meshgrid(1:0.05:3,-pi-0.2:0.1:pi+0.2);
x=r.*cos(phi);
y=r.*sin(phi);
z= x + (x./(x.^2+y.^2));

contour(x,y,z,15)             %Höhenlinien

t=[0:0.01:6.9];
plot(cos(t),sin(t),'b','LineWidth',4)        %Kreis
xlabel('Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung','FontSize',15)
%
```

Abgabetermine: 16.11.-20.11.2020