Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Funktionen
$f_k : D_k \to \mathbb{R}$; $D_k = [-1,1] \times [-1,1]$ für $k = 1,2,4$ und $D_3 = D_1 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$f_1(x,y) = x - 2y, \qquad f_2(x,y) = x\,y,$$

$$f_3(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_4(x,y) = \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen.

b) Zeichnen Sie für f_1 und f_3 einige Linien bzw. Kurven entlang derer die jeweilige Funktion konstant ist. Das sind die sogenannten Höhenlinien. Heften Sie an vier beliebigen Punkten Ihrer Höhenlinien die Richtung der Gradienten in diesen Punkten an. Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Lösungshinweise zur Aufgaben 1:

a) (i) $\operatorname{grad} f_1(x,y) = (1,-2)\,.$

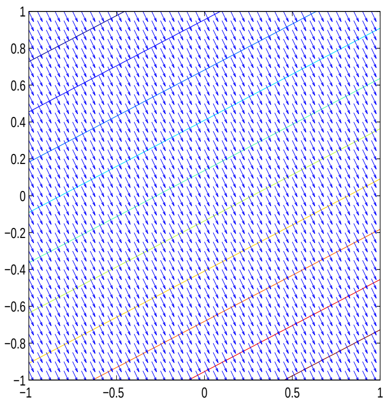
(ii) $\operatorname{grad}\ f_2(x,y) = (y,x)\ .$

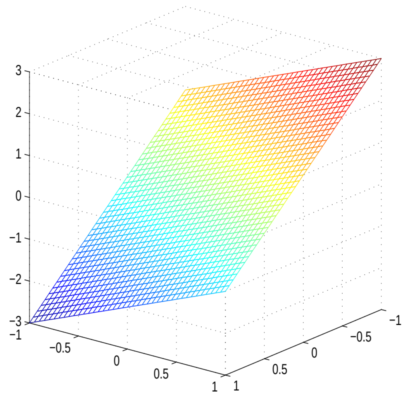
(iii) $$\operatorname{grad}\ f_3(x,y) = \frac{1}{2}\left(\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)_x, \left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)_y\right) = \frac{-1}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,(x,\,y)\ .$$

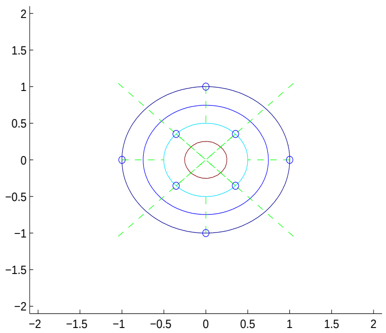
(iv) $\operatorname{grad}\ f_4(x,y) = \pi\cdot(\cos(2\pi y)\,\cos(\pi x),\ -2\,\sin(2\pi y)\,\sin(\pi x))\,.$

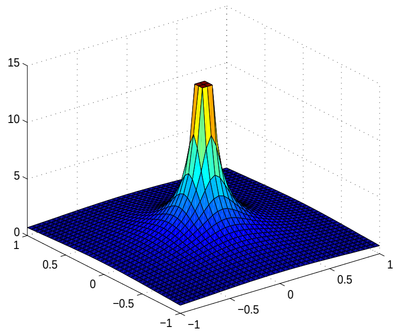
b) $f_1(x,y) = x - 2y = c \iff y = \frac{x}{2} - \frac{c}{2}$
Die Höhenlinien sind Geraden mit Steigung $\frac{1}{2}$.

$f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ist offensichtlich genau dann konstant, wenn $x^2+y^2 = K =: r^2$ gilt. Die Höhenlinien sind Kreise um den Ursprung.









Die Gradienten scheinen orthogonal zu den Höhenlinien zu sein. Sind sie auch! Wird später bewiesen

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$u \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) \,:=\, \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) .$$

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u .

b) Die Wärmeleitungsgleichung lautet $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = \mathbf{0}$. Es sei $k = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion u die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - u_t = 0$ löst. Skizzieren Sie die Lösung für mindestens vier verschiedene $t-$ Werte.

(ii) Seien $w(x,t)$ und $v(x,t)$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass dann

$$u(x,y,t) \,:=\, w(x,t) \cdot v(y,t)$$

die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} - u_t \,=\, 0$$

löst und geben Sie eine nichttriviale (d.h. nicht überall verschwindende) Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung an.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

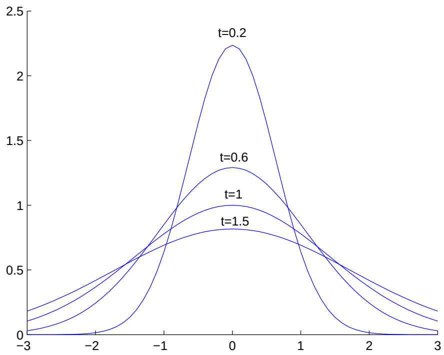
a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
u_t &= -\frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot t^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot t^{-\frac{5}{2}} \cdot (x^2 - 2t) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\
u_{tt} &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2} t^{-\frac{7}{2}} x^2 + 3t^{-\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4t^2}\left[t^{-\frac{5}{2}} x^2 - 2t^{-\frac{3}{2}}\right]\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2} t^{-\frac{7}{2}} x^2 + 3t^{-\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{4} t^{-\frac{9}{2}} - \frac{x^2}{2} t^{-\frac{7}{2}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(3t^{-\frac{5}{2}} - 3x^2 t^{-\frac{7}{2}} + \frac{x^4}{4} t^{-\frac{9}{2}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_x &= -\frac{x}{2t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\\
u_{xx} &= -\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{1}{2}\cdot x\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{x}{2t}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot t^{-\frac{5}{2}}\cdot(x^2-2t)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\\
u_{tx} = u_{xt} &= \frac{1}{4}\cdot\left(2t^{-\frac{5}{2}}x - \frac{x}{2t}t^{-\frac{5}{2}}x^2 + \frac{x}{2t}\,2t^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(2t^{-\frac{5}{2}}x - \frac{x^3}{2}t^{-\frac{7}{2}} + x\,t^{-\frac{5}{2}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(3xt^{-\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{2}t^{-\frac{7}{2}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)
\end{aligned}
$$

b) Die Behauptung ergibt sich aus a) denn es gilt

$$
u_t = \frac{1}{4}\cdot t^{-\frac{5}{2}}\cdot(x^2-2t)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = u_{xx}
$$



Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
u_t &= w_t\cdot v + w\cdot v_t \qquad u_{xx} = (w_x\cdot v)_x = w_{xx}\cdot v = w_t\cdot v\\
u_{yy} &= w\cdot v_{yy} = w\cdot v_t,
\end{aligned}
$$

also $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

Eine nichttriviale Lösung wäre zum Beispiel:

$$
u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)
$$

eine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung, welche offenbar nichttrivial ist (z.B. ist $u(0,0,1)=1$).

Bearbeitungstermine: 16.11.-20.11.2020