Fachbereich Mathematik **WiSe 2020/2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III, Version B)
29. März 2021

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 2y^2 + x \cdot \cos(y) + \sin(x-y)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Lösung: (3 Punkte)

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) = 2y^2 + x \cdot \cos(y) + \sin(x-y) & f(0,0) = 0 \\
f_x(x,y) = \cos(y) + \cos(x-y) & f_x(0,0) = 2 \\
f_y(x,y) = 4y - x\sin(y) - \cos(x-y) & f_y(0,0) = -1 \\
f_{xx}(x,y) = -\sin(x-y) & f_{xx}(0,0) = 0 \\
f_{xy}(x,y) = -\sin(y) + \sin(x-y) & f_{xy}(0,0) = 0 \\
f_{yy}(x,y) = 4 - x\cos(y) - \sin(x-y) & f_{yy}(0,0) = 4
\end{array}$$

$$T_2(x,y) = 2x - y + 2y^2\,.$$

Alternativ:

T_2 gibt polynomiale Anteile bis Grad zwei exakt wieder. Unter Verwendung der Potenzreihen von Sinus und Cosinus erhält man:

$T_2(x,y) = 2y^2 + x \cdot 1 + x - y = 2y^2 + 2x - y\,.$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \,=\, 2xy + xy^5\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese, stellen Sie also fest, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung:

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = \,(2y + y^5\,, 2x + 5xy^4),$ **(1 Punkt)**

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2+5y^4 \\ 2+5y^4 & 20xy^3 \end{pmatrix}.$$ **(1 Punkt)**

b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \,\mathbf{0} \Longrightarrow$

$(2+y^4)\cdot y \,= 0 \iff y = 0$

und $x(2+5y^4) \,=\, 0 \iff x = 0\,.$

$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der einzige stationäre Punkt von f. **(1 Punkt)**

$\det(\,\boldsymbol{H}\, f(0,0)) \,= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \,=\, -4\,.$

Die Eigenwerte der Hessematrix im Punkt (0,0) haben unterschiedliche Vorzeichen, es liegt also ein Sattelpunkt vor! **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie das globale Minimum und das globale Maximum von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x - 2y + 4$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2 = 0\,.$$

Verwenden Sie die Lagrangesche Multiplikatorenmethode und prüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung: Regularitätsbedingung:

$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 8y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)\,.$

Der Punkt $(0,0)$ ist wegen $g(0,0) = -2 \neq 0$ nicht zulässig.

Die Regularitätsbedingung ist also auf der zulässigen Menge erfüllt. [**1 Punkt**]

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} F(x,y) = \operatorname{grad}\left(f(x,y) + \lambda g(x,y)\right) &= (0,0) \\ g(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Gleichungssystem:

$I)\; F_x = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda \cdot 2x = 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0,$

$II)\; F_y = 0 \Longrightarrow -2 + \lambda \cdot 8y = 0$

$III)\; g = 0 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 2$ **(1 Punkt)**

Gleichungssystem lösen: (3 Punkte)

Alternative A: Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x \neq 0$ und $y \neq 0$, sowie

$I: \quad \lambda = -\frac{1}{2x}$

$II: \quad \lambda = \frac{1}{4y}$

Also: $\quad -\frac{1}{2x} = \frac{1}{4y} \Longrightarrow -2x = 4y \Longrightarrow x = -2y.$

$III) \quad x^2 + 4y^2 = (-2y)^2 + 4y^2 = 8y^2 = 2 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{4}\,.$

Wir erhalten also $y = \pm\frac{1}{2}$ und damit $x = \mp 1$

und damit zwei Kandidaten für globale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alternative B: Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda \neq 0$

$I: \quad x = -\frac{1}{2\lambda}$

$II: \quad y = \frac{1}{4\lambda}$

$III) \quad x^2 + 4y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + 4 \cdot \frac{1}{16\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2} = 2\,.$

Es folgt $4\lambda^2 = 1$ und damit:

$\lambda_1 = +\frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{1} = -1$, $y_1 = \frac{1}{2}$

und

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{-1} = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$

Wir erhalten also zwei Kandidaten für globale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alternative C:

$I)\ F_x = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda \cdot 2x = 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0,$

$II)\ F_y = 0 \Longrightarrow -2 + \lambda \cdot 8y = 0$

$III)\ g = 0 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 2$

$I \cdot 4y - II \cdot x = 0 \Longrightarrow 4y + 2x = 0 \Longrightarrow x = -2y$

Einsetzen in $III : x^2 + 4y^2 = 2 \Longrightarrow 8y^2 = 2 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{2} \Longrightarrow x = \mp 1$

Und man erhält wieder P_1 und P_2.

Klassifikation: (1 Punkt)

Es gilt

$f(P_1) = -1 - 1 + 4 = 2$ und $f(P_2) = 1 + 1 + 4 = 6$.

Weil die stetige Funktion f auf dem Kompaktum

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 2 = 0\right\}$$

ihr Minimum und Maximum annimmt, liegt in P_1 das globale Minimum vor und in P_2 das globale Maximum.

Aufgabe 4: (7 Punkte) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8xy^3 \\ 2x^2y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 4x^3 \\ 8x^2y + 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\boldsymbol{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie, welche(s) der Vektorfelder ein Potential besitzt.

b) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und/oder $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \qquad \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}.$$

Lösung: (7 Punkte)

a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, gelten folgende Implikationen:
$(f_1)_y = (8xy^3)_y = 24xy^2 \neq 4xy^2 = (2x^2y^2)_x = (f_2)_x$
$\Longrightarrow \boldsymbol{f}$ besitzt kein Potential.
$(g_1)_y = (8xy^2 + 4x^3)_y = 16xy = (8x^2y + 1)_x = (g_2)_x$
$\Longrightarrow \boldsymbol{g}$ besitzt ein Potential. **(2 Punkte)**

b) Wir berechnen ein Potential Φ zu $\boldsymbol{g}$.

$$\Phi_x = 8xy^2 + 4x^3 \iff \Phi(x,y) = 4x^2y^2 + x^4 + K(y)$$

$$\Phi_y = 8x^2y + K'(y) \stackrel{!}{=} 8x^2y + 1 \iff K'(y) = 1$$

$$\iff K(y) = y + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Also ist zum Beispiel $\Phi(x,y) = 4x^2y^2 + x^4 + y$ ein Potential für $\boldsymbol{f}$.
(2 Punkte)

c) Berechnung der Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} &= \int_0^1 < \boldsymbol{f}(c(t)), \dot{c}(t) > dt \\ &= \int_0^1 < \boldsymbol{f}(t,t^2), \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} > dt = \int_0^1 < \begin{pmatrix} 8t^7 \\ 2t^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} > dt \\ &= \int_0^1 8t^7 + 4t^7 dt = \left[\frac{12t^8}{8}\right]_0^1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(2 Punkte)

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}, = \Phi(c(1)) - \Phi(c(0)) = \Phi(1,1) - \Phi(0,0) = 4+1+1-0 = 6.$$

(1 Punkt)