Fachbereich Mathematik **SoSe 2021**

Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)

08. September 2021

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$$\sum \; =$$

Aufgabe 1) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : (-0.4, \infty) \times (-0.4, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := y \cdot e^{-x} + \ln(1 + x + y)\,.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.1,\, 0.1] \times [-0.1,\, 0.1]$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{1}{100}\,.$$

Lösung:

a) (4 Punkte)

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) = y \cdot e^{-x} + \ln(1+x+y) & f(0,0) = 0 \\
f_x(x,y) = -y \cdot e^{-x} + \frac{1}{1+x+y} & f_x(0,0) = 1 \\
f_y(x,y) = e^{-x} + \frac{1}{1+x+y} & f_y(0,0) = 2 \\
f_{xx}(x,y) = y \cdot e^{-x} - \frac{1}{(1+x+y)^2} & f_{xx}(0,0) = -1 \\
f_{xy}(x,y) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x+y)^2} & f_{xy}(0,0) = -2 \\
f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2} & f_{yy}(0,0) = -1
\end{array}$$

$$T_2(x, y) = x + 2y + \frac{1}{2}(-x^2 - 2 \cdot 2xy - y^2) = x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{y^2}{2}\,.$$

b) **(4 Punkte)**

Für die Fehlerabschätzung berechnen wir für die Beträge aller dritten Ableitungen eine, für alle $(x, y) \in D$ gültige, gemeinsame obere Schranke.

$$|\, f_{xxx}(x,y)\,| = \left| -y \cdot e^{-x} + \frac{2}{(1+x+y)^3} \right| \leq |y| e^{-x} + \left| \frac{2}{(1+x+y)^3} \right|$$

$$|\, f_{xxy}(x,y)\,| = \left| e^{-x} + \frac{2}{(1+x+y)^3} \right| \leq e^{-x} + \left| \frac{2}{(1+x+y)^3} \right|$$

$$|\, f_{xyy}(x,y)\,| = \left| \frac{2}{(1+x+y)^3} \right|$$

$$|\, f_{yyy}(x,y)\,| = \left| \frac{2}{(1+x+y)^3} \right|.$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen von f, in allen Punkten aus D, sind also betragsmäßig nach oben beschränkt durch

$$e^{-x} + \left| \tfrac{2}{(1+x+y)^3} \right| \leq e^{0.1} + \tfrac{2}{(1-01-0.1)^3} \leq 2 + 2 \cdot \tfrac{10^3}{8^3} =: C$$

$$C = 2 + 2 \cdot \tfrac{5^3}{4^3} = 2 + \tfrac{250}{64} < 6.$$

Der Fehler $|f(x, y) - T_2(x, y)|$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot \|(x, y)\|_\infty^3 \cdot C \leq \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{10^3} \cdot 6 = \; = \frac{8}{10^3} < \frac{1}{100}.$$

Aufgabe 2: (7 Punkte) Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) := x^2 \; - \; x^2 y \; + \; \frac{y^3}{3}\,.$$

Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und zeigen Sie, dass es mindestens zwei Sattelpunkte gibt.

Kann es sich bei einem der stationären Punkte um ein lokales Maximum handeln? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: $f_x(x,y) = 2x - 2xy = \; 0 \iff x = 0 \;\vee\; y = 1.$ **(1 Punkt)**

$f_y(x,y) = -x^2 + y^2 = \; 0 \iff x = \pm y\,.$ **(1 Punkt)**

Es gibt also die drei stationären Punkte

$P_1 \; := \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad P_{2,3} \; := \; \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **(1 Punkt)**

Für die Hessematrix rechnet man $Hf(x,y) \; = \; \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$. **(1 Punkt)**

$Hf(P_{2,3}) \; = \; Hf(\pm 1, 1) \; = \; \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 2 \end{pmatrix}$

Die Determinanten dieser Matrizen sind negativ. Die Matrizen haben je einen positiven und einen negativen Eigenwert. Es liegen zwei Sattelpunkte vor. **(2 Punkte)**

Bemerkung: Wer die Eigenwerte berechnet erhält

$P(\lambda) = \; -\lambda(2-\lambda) - 4 = \; \lambda^2 - 2\lambda - 4 \; = \; (\lambda - 1)^2 \; - 5 = 0 \iff \lambda_{1,2} \; = \; 1 \pm \sqrt{5}\;.$

$Hf(P_1) \; = \; Hf(0,0) = \; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Matrix hat einen positiven Eigenwert und den Eigenwert Null. Es kann ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegen. Ein Maximum kann nicht vorliegen. **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben sind der wie folgt beschriebene Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x \in [1,3], \;\; 1-x \leq y \leq 2+x, \;\; x^2+y^2-1 \leq z \leq x^2+y^2+1 \right\},$$

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} yz+y \\ x(z+1)+y \\ y(z+2)+x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{f}(x,y,z))\, \mathrm{d}(x,y,z).$$

Lösung:

$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z = 0+1+y$.**(1 Punkt)**

$$\begin{aligned}
\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} \int_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1} (1+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\; \mathrm{d}x \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} [(1+y)z]_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1} \mathrm{d}y\; \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} 2(1+y)\mathrm{d}y\; \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left[(1+y)^2\right]_{1-x}^{2+x} = \int_1^3 (3+x)^2 - (2-x)^2\; \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 (9+6x+x^2-4+4x-x^2)\; \mathrm{d}x \;= \int_1^3 (5+10x)\; \mathrm{d}x = \left[5x+5x^2\right]_1^3 \\
&= 5(12-2) \;=\; 50. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$