

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5, Präsenzaufgaben

### Aufgabe 1: (Alte Klausuraufgaben)

a) Gegeben seien das Kraftfeld  $\mathbf{K}$  und die Kurve  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [1, 3].$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve  $\mathbf{c}$  von  $\mathbf{c}(1)$  nach  $\mathbf{c}(3)$  zu bewegen.

b) Gegeben seien die Vektorfelder  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie Potentiale zu  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$ , falls dies möglich ist.
- (ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

### Aufgabe 2)

Gegeben sind die Vektorfelder  $\mathbf{v}^{[i]} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  bzw.  $3$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{[1]}(x, y) &= (x^3, y^3)^T, & D &:= \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{v}^{[2]}(x, y, z) &= (xy^2 + xz^2, yx^2 + yz^2, zy^2 + zx^2)^T, & D &:= \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{v}^{[3]}(x, y, z) &= (-y^2, xy, -2y)^T, & D &:= \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) &= \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)^T, & D &:= \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) d(x, y, z)$$

entlang des Kreises

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Prüfen Sie, welche der Vektorfelder  $\mathbf{v}^{[i]}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  Potentiale besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential.

c) Berechnen Sie zu  $v^{[1]}(x, y)$  die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c}(t) = \left( t(t-4) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t \right)^T, \quad t \in [a, b] := [0, 4].$$

von  $c(0)$  nach  $c(4)$  zu bewegen.

**Bearbeitungstermine:** 25.01.–29.01.21