Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 5 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Transformationssatz, Kurvenintegrale und Potentiale

Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Volumen, Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

$D \subset \mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$ kompakt, meßbar, $\rho(\boldsymbol{x})$ Massendichte

Volumen (Flächeninhalt): $V = \int_D 1 \, d\boldsymbol{x}$

Masse: $M = \int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \dfrac{\int_D \rho(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{x}}{\int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}$ (komponentenweise)

Trägheitsmoment:

$\Theta_A = \int_D \rho(\boldsymbol{x}) \, r^2(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}$ $\qquad r(\boldsymbol{x}) =$ Abstand zur Achse A

Beispiele für Abstände:
Abstand zur $z-$Achse im $\mathbb{R}^3$: $\sqrt{x^2 + y^2}$.
Abstand zur $x-$Achse im $\mathbb{R}^2$: $\sqrt{y^2} = |y|$.

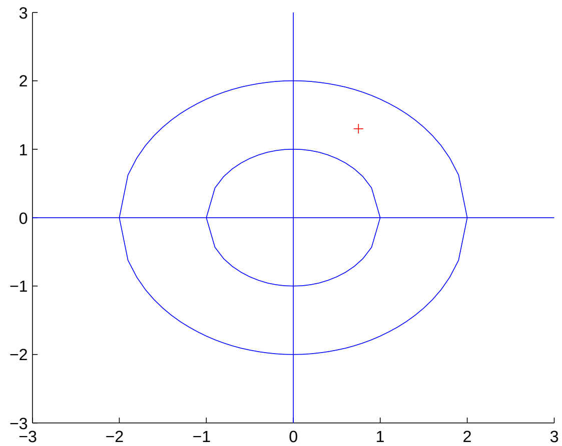
Beispiel 1: Gegeben ist der halbe Kreisring

$$K:\ 1\ \leq\ x^2+y^2\ \leq\ 4, \qquad x\leq 0$$

mit der Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

Gesucht: Masse und den Schwerpunkt von K

Berechnung in kartesischen Koordinaten umständlich!



In Polarkoordinaten

$x=r\cos(\phi)$, $y=r\sin(\phi)$

$K:$

$\rho(r,\phi)=$

Gebiet und Funktion: viel einfacher.

ABER: Koordinatenwechsel / Substitution nötig!

Transformationssatz:

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$ gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u)du \qquad (\phi'(u) \neq 0\,, \quad \forall u \in]a,b[)$$

Unter den in der Vorlesung angegebenen Voraussetzungen an Φ und D und f gilt hier:

$$\int_{\Phi(D)} f(\boldsymbol{x})d(\boldsymbol{x}) = \int_D f(\Phi(\boldsymbol{u}))\cdot|\det J\Phi(\boldsymbol{u})|d\boldsymbol{u} \qquad (|\det J\Phi(\boldsymbol{u})| \neq 0\,, \quad \forall \boldsymbol{u} \in D^\circ)$$

Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\left|\det\left(J\Phi(r,\varphi)\right)\right| =$$

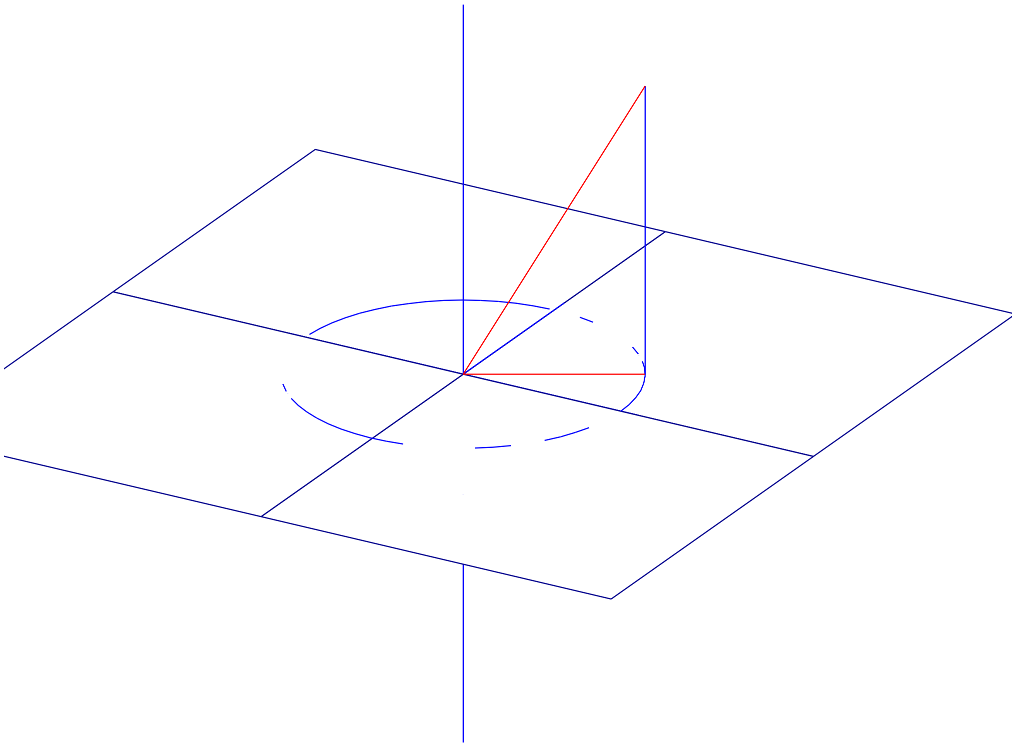
Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left|\det\left(J\Phi(r,\varphi)\right)\right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$|det(J\Phi(r,\varphi))| = r^2\cos(\theta).$



$r =$

$z =$

$R =$

$x =$

$y =$

Im Beispiel 1 war $\rho(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ im halben Kreisring

$K:\ 1 \ \le\ x^2+y^2\ \le\ 4, \qquad x \le 0$

$r \in \qquad\qquad \phi \in$

$$\text{Masse} = \int_K \rho(x,y)\,d(x,y)\ =\ \int_R \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x,y)\ =\ \int \int \frac{1}{r^2} \qquad d\phi\,dr$$

$$= \int \frac{1}{r}\,[\qquad]\qquad dr\ =\ \pi \int \frac{1}{r}\,dr =\ \pi\,[\ln(r)]_1^2 = \pi\ln(2) =: M.$$

Schwerpunkt (x_s, y_s). Klar ist $y_s =$

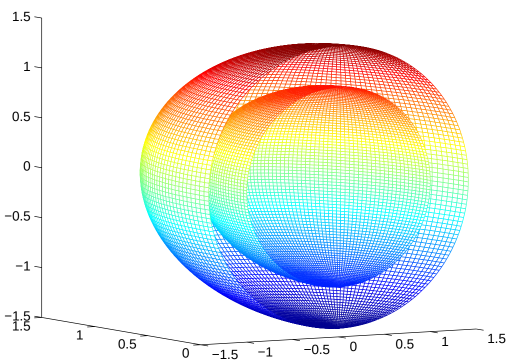
$$x_s = \frac{1}{M}\int_K \rho(x,y)\,x\,d(x,y)\ =$$

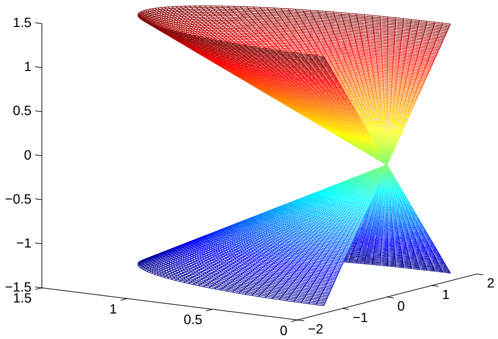
$$=$$

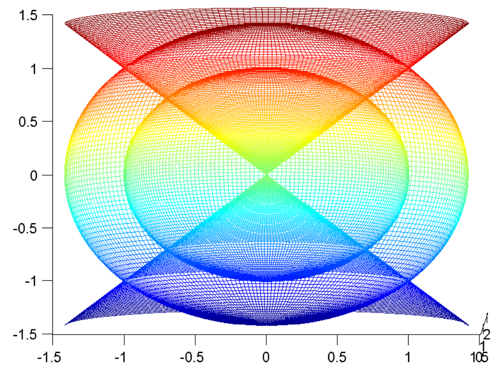
Beispiel 2:

Gegeben sei der wie folgt beschriebene Teil D einer Kugelschale:

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \, 1 \leq \, x^2 + y^2 + z^2 \leq \, 2 \, , \, y \geq \, 0 \, , \, z^2 \leq \, x^2 + y^2 \right\} .$$







Berechnen Sie das Trägheitsmoment von D bzgl, der z–Achse bei homogener Massendichte $\rho = 2$.

Hinweis: $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(x) + \cos(3x))$

Lösung:)

Übergang zu Kugelkoordinaten:

$$\Phi \ : \begin{cases} r \in \qquad\qquad\qquad , \phi \in \qquad\qquad\qquad , \theta \in \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die Determinante der Transformationsmatrix $=$ det $\boldsymbol{J}\Phi = r^2\cos(\theta)$

$a_z(x,y,z) :=$ Abstand zur $z-$Achse $= \sqrt{x^2+y^2}$.

$$x^2+y^2 = r^2\,\cos^2(\varphi)\,\cos^2(\theta) + r^2\,\sin^2(\varphi)\,\cos^2(\theta) =$$

$$\Theta_z = \int_D \rho\cdot(a_z(x,y,z))^2\,d(x,y,z)$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\pi} 2\cdot r^2\cos^2(\theta)\cdot r^2\cos(\theta)\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$=$$

$$=2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^4\cdot\cos^3(\theta)\,d\theta\,dr$$

Hinweis: $\cos^3(x) = \dfrac{3\cdot\cos(x)+\cos(3x)}{4}$

$$=2\pi \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^4 \cdot \left(\frac{3\ \cos(\theta) +\ \cos(3\theta)}{4}\right)\ d\theta\, dr$$

$$=\frac{\pi}{2} \int_{1}^{\sqrt{2}} r^4 \cdot \left[3\ \sin(\theta) + \frac{1}{3}\ \sin(3\theta)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}\ dr$$

Potentiale

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld,

$\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt **Potential** von $\boldsymbol{f}$, wenn $\forall \boldsymbol{x} \in D$:

$$\boxed{\nabla \cdot \phi(\boldsymbol{x}) \;=\; \mathrm{grad}^T \phi(\boldsymbol{x}) \;=\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

Im $\mathbb{R}^3$ heißt das

$$\phi_x = f_1, \quad \phi_y = f_2, \quad \phi_z = f_3$$

Zur Erinnerung: $\mathrm{rot}(\,\mathrm{grad}\,\phi\,) = 0 \quad \forall\, C^2$ Funktionen ϕ

Es kann also nur dann ein Potential geben, wenn $\boxed{\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} \;=\; 0}$ gilt.

Rotation des Vektorfeldes bei n=3

$$\textbf{rot} \quad \boldsymbol{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \textbf{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Skalare Rotation bei n=2: rot $\boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y$

$$\boxed{\text{rot } \boldsymbol{f} \neq \mathbf{0} \implies \text{Es gibt kein Potential}}$$

Bemerkung: im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ gilt rot $\boldsymbol{f} = \mathbf{0} \iff J\boldsymbol{f}$ symmetrisch.

Integrabilitätsbedingung: im $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\text{falls } D \text{ einfach zusammenhängend: } J\boldsymbol{f} \text{ symmetrisch} \iff \exists \text{ Potential}}$$

Konstruktion von ϕ

Beispiel 1) $$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - e^x z \\ 2x^3y + \sin z \\ y\cos z - e^x \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Falls	$\phi_x = 3x^2y^2 - e^x z$
dann	$\phi(x, y, z) =$
und	$\phi_y =$
andererseits	$\phi_y \stackrel{!}{=} f_2 = 2x^3y + \sin z$
$\Longrightarrow$	$C_y(y, z) \stackrel{!}{=}$
also	$\phi(x, y, z) = x^3y^2 - e^x z + y\sin z + \tilde{C}(z)$

und $\qquad \phi_z = y\cos z - e^x \;+\; \tilde{C}'(z)$

andererseits $\qquad \phi_z \stackrel{!}{=} \; f_3 = y\cos z - e^x$

$\Longrightarrow \qquad \tilde{C}'(z) \stackrel{!}{=} \; 0 \Longrightarrow \tilde{C}(z) = k$

also $\qquad \phi(x,y,z) \;=\; x^3y^2 - e^x z \;+\; y\sin z + k \qquad k \in \mathbb{R}$

Beispiel 2) $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + \dfrac{3x^2}{1+x^3} \cdot \cos(y) \\ \\ x^2 + \ln(1+x^3) \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \\ \phi_y \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0$

Das sieht kompliziert aus! Lohnt sich der Versuch des Integrierens?

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\boldsymbol{f}(x,y) &= (f_2)_x - (f_1)_y \\ &= 2x + \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot \sin(y) - 2x - \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot (-\sin(y)) \end{aligned}$$

Beispiel 3) $D = \mathbb{R}^3$, $\quad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\cos(x) \\ z\sin(x) + 2y + z \\ y\sin(x) + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & z\cos(x) & y\cos(x) \\ z\cos(x) & \ldots\ldots & \\ y\cos(x) & & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\quad \mathbf{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad$ (stkw. C^1)

$\mathbf{c}(a) =$ Anfangspunkt, $\quad \mathbf{c}(b) =$ Endpunkt,

$D \subset \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad$ Vektorfeld.

Aus 2. Semester bekannt: Kurvenintegral über skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{s} := \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Neu: Kurvenintegral über Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$

$$W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt$$

$$= \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} > \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.

Hauptsatz:

$$\boxed{\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \phi = (\mathsf{grad}\,\phi)^T \implies \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \;=\; \phi(c(b)) - \phi(c(a))}$$

D.h. insbesondere: Kurvenintegral ist **wegunabhänging** und

$$\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \;=\; 0 \quad \forall \text{ geschlossenen } \mathbf{c}$$

Das Kraftfeld ist **konservativ**.

Beispiel 1: Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) := (2xz^3 + 6y,\ 6x + 2yz,\ 3x^2z^2 + \alpha y^2)^T.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{f}$ ein konservatives Kraftfeld?

b) Berechnen Sie mit dem in Teil a) errechneten Wert von α die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve

$$c(t) = \left(\cos(\pi t/2), t, (4 - 2t)e^{(t-1)^2}\right)^T \qquad t \in [1, 2]$$

von $A = c(1)$ nach $B = c(2)$ zu bewegen.

Lösung:

a) Es gilt $(f_3)_y = 2\alpha y$ und $(f_2)_z = 2y$. Das Kraftfeld kann nur für $\alpha = 1$ konservativ sein.

Für $\alpha = 1$ rechnet man mit

$$\mathbf{f}(x,y,z) := (2xz^3 + 6y, 6x + 2yz, 3x^2z^2 + \alpha y^2)^T \stackrel{!}{=} (\Phi_x,\ \Phi_y,\ \Phi_z\ ).$$

$$\Phi_x \stackrel{!}{=} 2xz^3 + 6y \implies$$

$$\Phi_y = 6x + h_y(y,z) \stackrel{!}{=} 6x + 2yz$$

$$\Phi = x^2z^3 + y^2z + 6xy + g(z)$$

$$\Phi_z = 3x^2z^2 + y^2 + g'(z) \stackrel{!}{=} 3x^2z^2 + y^2 \implies g'(z) = 0 \implies$$

$$\Phi = x^2z^3 + y^2z + 6xy + K$$

b) $c(t) = \left(\cos(\pi t/2), t, (4-2t)e^{(t-1)^2}\right)^T \qquad t \in [1,2]$

$$\Phi = x^2 z^3 + y^2 z + 6xy + K$$

Im Kraftfeld von $A = c(1)$ nach $B = c(2)$ bewegen:

$$A = c(1) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) \\ 1 \\ (4-2)e^{(1-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$B = c(2) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/2) \\ 2 \\ (4-4)e^{(2-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\int_c \mathbf{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) =$$

$$=$$

Beispiel 2:

Gegeben $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, und die Kurve $\mathbf{c}$:

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$.

Lösung:

$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = 1 \qquad \Longrightarrow$ es gibt kein Potential. Zu berechnen

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \int_0^1 < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt \,, \qquad \boldsymbol{f}\,(x,y,z)^T = (y^2, x+1, z+1)^T \,.$$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) =$$

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)) = \boldsymbol{f} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} =$$

$$< \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > =$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} &= \int_0^1 (\, t^4 + 2t^2 + 2t + 2t^3 + 2t \,) dt \\ &= \int_0^1 (\, t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 4t \,) dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{3} + 4 = \frac{101}{30} \,. \end{aligned}$$