Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

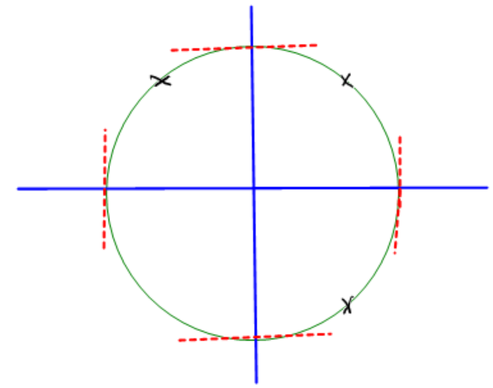
Ebene Kurven, Extrema unter Nebenbedingungen, Integration

Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Ebene Kurven, singuläre Punkte



Beispiel 1: Der Kreis $g(x, y) := x^2 + y^2 - 25 = 0$ hat

horizontale Tangenten für $g_x = 2x = 0$,

vertikale Tangenten für $g_y = 2y = 0$,

Symmetrie:

zur $x-$Achse : $g(x, y) = g(x, -y)$

zur $y-$Achse : $g(x, y) = g(-x, y)$

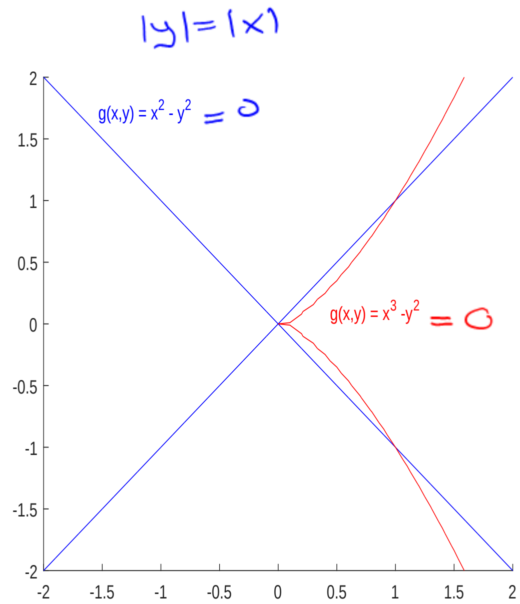
zum Ursprung : $g(x, y) = g(-x, -y)$

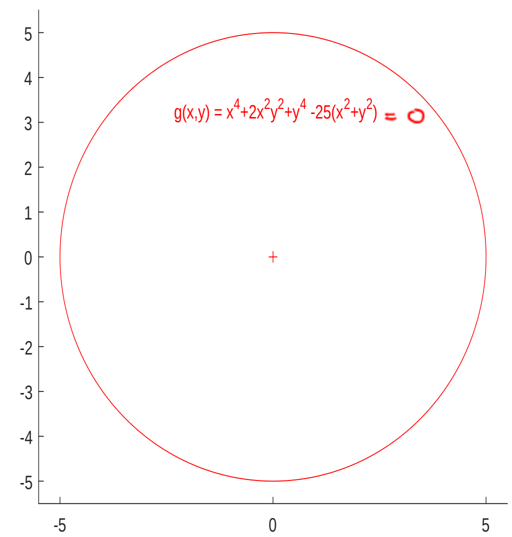
Kreis: da in g nur gerade Potenzen auftauchen, ist die Kurve symmetrisch zur $x-$Achse, zur $y-$Achse und zum Ursprung.

Der Kreis hat keine Punkte mit $g_x = g_y == 0$. Sogenannte **singuläre Punkte**.

Bei **singulären Punkten** unterscheidet man zwischen

Doppelpunkten, Rückkehrpunkten/Spitzen und isolierten Punkten





Allgemein: Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x, y) = 0$$

Singulärer Punkt: $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$

In einem solchen Punkt: keine Garantie, dass die Kurve nach x oder y parametrisiert werden kann.

Klassifikation über die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Hessematrix $Hg(x_0, y_0)$ von g

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Doppelpunkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: **isolierter Punkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix $\neq$ Nullmatrix : **Rückkehrpunkt/Spitze**.

Horizontale Tangente: $g_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Vertikale Tangente: $g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Beispiel 2: Kurve beschrieben durch:

Symmetrisch bzgl x- und y-Achse und Ursprung da nur gerade Potenzen von x, y

$$g(x,y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

a) **singuläre Punkte**

$$g_x(x,y) = 2(x^2+4y^2)2x + 2x = 2x\underbrace{(2x^2+8y^2+1)}_{\geq 1} = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

Einsetzen von $x = 0$ in g:

$$g(0,y) = (4y^2)^2 - 4y^2 \overset{!}{=} 0$$

$4y^2 [4y^2 - 1] = 0 \iff y = 0 \vee 4y^2 = 1$

$y^2 = 1/4$

$y = \pm 1/2$

Kandidaten: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$g_y = 2(x^2+4y^2)8y - 8y = 8y(2x^2+8y^2-1)$$

$$g_y(0, \pm\tfrac{1}{2}) = \pm\frac{8}{2}\left(0 + \frac{8}{4} - 1\right) = \pm 4 \cdot 1 \neq 0 \implies P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}$$

keine sing. Punkte

$g_x = g = 0$

aber $g_y \neq 0$

$g_y(0,0) =$ 0 ✓ $\qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ singulärer Pkt

$g_x = g = g_y = 0$

Klassifizierung: Vorzeichen der Determinante von Hessematrix

$g_x = 4x^3 + 16xy^2 + 2x$

$g_y = 16yx^2 + 64y^3 - 8y$

$$g_{xx} = 12x^2 + 16y^2 + 2$$
$$g_{xy} = 32xy$$
$$g_{yy} = 16x^2 + \overset{3 \cdot 64}{192}y^2 - 8$$

damit erhält man

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -8$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$

Es liegt also ein Doppelpunkt vor.

b) Gesucht sind Punkte mit horizontaler Tangente $g = \underbrace{g_x = 0}_{x=0}$, $g_y \neq 0$.

Oben schon geprüft: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{singulär } g_y = 0}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_{g_y \neq 0}$

c) Gesucht sind Punkte mit vertikaler Tangente $g = g_y = 0,\ g_x \neq 0$.

$$g_y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y = 0 \vee 2x^2 + 8y^2 - 1 = 0$$

$y = 0$ eingesetzt in g

$$g(x, 0) = (x^2 + 0)^2 + x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \implies P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ singulär}$$

Welche Punkte der Kurve erfüllen

$$2x^2 + 8y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow 4y^2 = \tfrac{1}{2} - x^2 \quad (*)$$

$8y^2 = 1 - 2x^2$

eingesetzt in g

$$g(x, y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 = \Big(\underbrace{x^2 + \tfrac{1}{2} - x^2}_{1/4}\Big)^2 + x^2 - \tfrac{1}{2} + x^2 = 0$$

$$+\,2x^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 = \tfrac{1}{4} \qquad x^2 = 1/8$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = \tfrac{1}{8}, \quad (*)\ y^2 = \tfrac{1}{8}(1 - 2x^2)$$

$$y^2 = \tfrac{1}{8}\left(1 - \tfrac{2}{8}\right) = \tfrac{3}{32}$$

$$P_{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \pm\sqrt{3/32} \end{pmatrix} \qquad P_{5,6} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{8} \\ \pm\sqrt{3/32} \end{pmatrix}$$

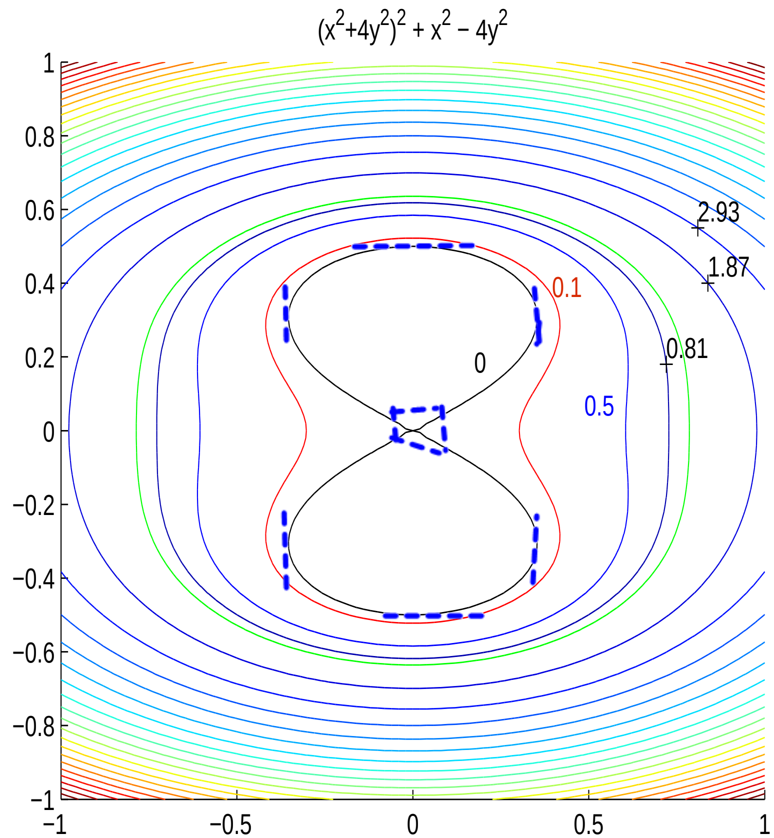
erfüllen $g_y = 0$ und $g = 0$

und $g_x \neq 0$ $(\Updownarrow\ x = 0)$

Kandidaten: $P_{3,4}$ und $P_{5,6}$

Zu prüfen wäre noch $g_x \neq 0$ $g_x = 0$ nur für $x = 0$

$\Rightarrow$ vertikale Tangenten in $P_{3,4}$ und $P_{5,6}$



Optimierung mit Gleichungsnebenbedingungen

hier $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ oder $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Problem: $\boxed{f(\boldsymbol{x}) \;=\; \text{min/max} \;\; !}$ unter der(den) Nebenbedingung(en)

$$\boxed{g(\boldsymbol{x}) \;=\; 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ h(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

Regularitätsbedingung (RB)

Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen hat maximalen Rang:

Bei einer Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = 0$ heißt das $\operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$,

bei zwei Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}) = 0,\ h(\boldsymbol{x}) = 0$: Rang $\begin{pmatrix} \text{grad}\, g(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, h(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 2$,

jeweils für die zulässigen Punkte.

Euler, Lagrange: Definiere mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$ die erweiterte Funktion

Lagrange Funktion $F := f + \lambda g$ $\quad bzw. \quad$ $\boxed{F := f + \lambda g + \mu h}$

Bestimme stationäre Punkte von F d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} F = \mathbf{0}$

für die zusätzlich : $\quad g = 0$ bzw. $g = h = 0$ gilt!

D.h. bestimme Kandidaten für Min/Max von $F(x, y; \lambda)$ bzw. $F(x, y, z; \lambda, \mu)$

Notwendige Bedingung für Min/Max von f unter g=(h=)=0

Wenn die **Regularitätsbdingung** erfüllt ist, ist jedes Extremum von f unter den Nebenbedingungen g=(h=)=0 ein stationärer Punkt der **Lagrange-Funktion** $F(x, y, z; \lambda, \mu)$. D.h.

$$\boxed{\text{grad } F(x, y, z; \lambda, \mu) = 0, \quad g = h = 0}$$

Ausführlicher für R^3. (Im Fall R^2: Zeile 3 und 5 streichen und überall sonst z streichen und $\mu = 0$ setzen.)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
F_x &= f_x + \lambda\, g_x + \mu\, h_x = 0 \\
F_y &= f_y + \lambda\, g_y + \mu\, h_y = 0 \\
F_z &= f_z + \lambda\, g_z + \mu\, h_z = 0 \\
F_\lambda &= g(x, y, z) = 0 \\
F_\mu &= h(x, y, z) = 0
\end{aligned}
}
$$

Klassifizierung: (Min, Max oder Sattel)

A) Zulässige Menge kompakt und f stetig : $\Longrightarrow$ Min/Max werden angenommen.

Kandidat mit höchstem Funktionswert $=$ globales Maximum.

Kandidat mit kleinstem Funktionswert $=$ globales Minimum.

B) Bedingungen zweiter Ordnung : (im Fall von 2 Nebenbedingungen)

Sei $\boldsymbol{x}_0$ zulässig (d.h. $g(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0) = 0$),
die Regularitätsbedingung erfüllt in $\boldsymbol{x}_0$, und es gelte

$$\exists \lambda, \mu \quad \text{mit} \qquad \mathrm{grad}\ F(\boldsymbol{x}_0; \lambda, \mu) = 0$$

Definiere Tangentialraum:

$$TG(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{w}\ :<\ w, \mathrm{grad}\, g(\boldsymbol{x}_0)\ >= 0\ \text{ und }\ <\ w, \mathrm{grad}\, h(\boldsymbol{x}_0)\ >= 0\,\}$$

Dann ist

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Minimum : } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \geq 0\textbf{,}}$$

$$\text{und } \boxed{\textbf{hinreichend für lokales Minimum : } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} > 0\textbf{.}}$$

Analog

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Maximum : } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \leq 0\textbf{,}}$$

$$\text{und } \boxed{\textbf{hinreichend für lokales Maximum : } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} < 0\textbf{.}}$$

Das heißt insbesondere : die notwendigen Bedingungen aus dem unrestingierten Fall für Minima (Maxima), nämlich Hesse-Matrix positiv (negativ) semidefinit sind hier keine notwendigen Bedingungen mehr. Die Matrix kann z.B. auch bei einem Minimum negative Eigenwerte haben, sofern die zugehörigen Eigenvektoren keine zulässigen Richtungen sind, d.h. aus der zulässigen Menge raus führen.

Beispiel 1) Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Gesucht sind die Extrema von} \quad f(x,y) = 2 - x + \frac{4}{9}y \\ &\text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x,y) = 25 - 9x^2 - y^2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung:

Regularitätsbedingung: $\operatorname{grad} g(x,y) = (-18x, \; -2y) \neq (0,0)^T$ $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(0,0) = 25 - 0 - 0 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht zulässig $\Rightarrow$ R.B. ist $\forall$ zulässigen Punkte erfüllt

Lagrange Funktion: $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$

$F_x: \; f_x + \lambda g_x = -1 + \lambda(-18x) = 0$

$F_y: \; f_y + \lambda g_y = \frac{4}{9} + \lambda(-2y) = 0$

$F_\mu: \; g = 25 - 9x^2 - y^2 = 0$

Notwendige Bedingung für (lokale) Extrema:
$\operatorname{grad} F(x,y) := \operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y) = 0.$

Also haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -1+\lambda\cdot(-18x) &= 0 \implies \lambda\neq 0 \wedge x = -\frac{1}{18\lambda}\,,\\ \frac{4}{9}+\lambda\cdot(-2y) &= 0 \implies \lambda\neq 0 \wedge y = \frac{2}{9\lambda}\,,\\ \underbrace{25 - 9x^2 - y^2} &= 0\,. \end{cases}$$

$$25 - 9\left(\frac{-1}{18\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2}{9\lambda}\right)^2 = 0$$

Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile einsetzen:

$$25 - \frac{9}{18\cdot 18\cdot\lambda^2} - \frac{4\cdot 4}{4\cdot 9\cdot 9\cdot \lambda^2} = 0$$

$$25 - \frac{9}{18^2\lambda^2} - \frac{2^2\cdot 4}{9^2\lambda^2\cdot 4} = 0 \implies 25 = \frac{9+4\cdot 4}{18^2}\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{25}{18^2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\cancel{25}\lambda^2 = \frac{\cancel{25}}{18^2} \implies \lambda = \pm\frac{1}{18}$$

$$x = -\frac{1}{18\lambda} = \mp 1$$

$$y = \frac{2}{9\lambda} = \pm 4$$

Wir erhalten also zwei Lösungen:

$\lambda_1 = \frac{1}{18}$, $x_1 = -\frac{1}{18\lambda_1} = -1$, $y_1 = \frac{2}{9\lambda_1} = 4$

und

$\lambda_2 = -\frac{1}{18}$, $x_2 = -\frac{1}{18\lambda_2} = 1$, $y_2 = \frac{2}{9\lambda_2} = -4$.

Kandidaten

$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die zulässige Menge ist kompakt. Minimum und Maximum werden angenommen. Die einzigen Kandidaten sind P_1 und P_2.

$f(x, y) = 2 - x + \frac{4}{9}y$

$f(P_1) = f(-1, 4) = 2 + 1 + \frac{16}{9}$, $\quad$ $f(P_2) = f(1, -4) = 2 - 1 - \frac{16}{9}$.

Globales Minimum in der zulässigen Menge liegt in P_2.

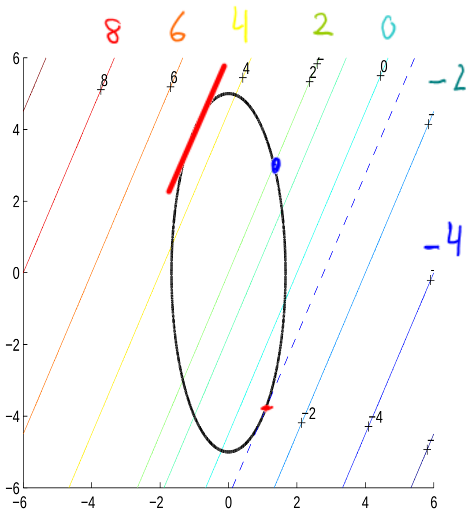
Globales Maximum in der zulässigen Menge liegt in P_1.

Alternativ: Für die Hessematrix rechnet man:

$$\boldsymbol{H}\overset{F}{\cancel{f}}(x, y\,;\lambda) = \begin{pmatrix} -18\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Diese ist für λ_1 negativ definit und für λ_2 positiv definit. Also liegt im Punkt $P_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Maximum vor und im Punkt

$$P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ein Minimum.}$$



Was wäre noch zusätzlich zu prüfen, wenn die **globalen Extrema** unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = 25 - 9x^2 - y^2 \leq 0$$

gesucht wären?

- Bestimme Kandidaten mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$
  $\longrightarrow$ ggf. Kandidaten im Inneren + Klassifikation Min/Max
- Bestimme Kandidaten mit $g(x,y) = 0$ wie oben
- vgl. Funktionswerte

Beispiel 2: [Alte Klausuraufgabe]

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = x - 8y + z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

$$g(x,y,z) = x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$$

und

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Lösungsskizze:

Regularitätsbedingung (RB):

$$J(g,h)(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2(y+4) & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

RB verletzt falls

$\alpha . 2x = 2x$

$2\alpha y + 4\alpha = 2y$

$\alpha = 1$

$2y + 4 = 2y$ ↯

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+4) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \vee x = 0 \\ \text{nicht erfüllbar für } \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \vee z = 0 \end{cases}$$

$\alpha 2z = 2z$

RB kann also nur für $x = z = 0$ verletzt sein.

$$g(0, y, 0) = 0 + (y+4)^2 + 0 - 25 = 0 \implies y = -4 \pm 5,$$

$$h(0, y, 0) = 0 + y^2 + 0 - 9 = \implies y = \pm 3.$$

↯ Es gibt keinen zulässigen Punkt mit $x=0$ und $z=0$

Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Mit $f(x, y, z) = x - 8y + z$ und der Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ erhält man als notwendige Bedingungen für Extrema:

$g(x,y) = x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$

$h(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

I $F_x = 0:$ $f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 1 + \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 2x = 0$

II $F_y = 0:$ $f_y + \lambda g_y + \mu h_y = -8 + \lambda \cdot 2(y+4) + \mu \, 2y = 0$

III $F_z = 0:$ $f_z + \lambda g_z + \mu \cdot h_z = +1 + \lambda \cdot 2z + \mu \, 2z = 0$

IV F_λ $g = 0:$ $x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$

V F_μ $h = 0:$ $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

IV − V
$$(y+4)^2 - y^2 = 16 \iff 8y + \cancel{16} = \cancel{16}^{\,0} \iff \boxed{y = 0.}$$

in II: $-8 + \lambda \cdot 2 \cdot 4 + \mu \cdot 0 = 0$

$-8 + 8\lambda = 0$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $\boxed{\lambda = 1}$ und damit

I $\quad$ İ) $1 + 2x + 2\mu x = 0,$ $\quad \cdot z$

III $\quad$ İİ) $1 + 2z + 2\mu z = 0,$ $\quad \cdot x$

V $\quad$ İİİ) $x^2 + z^2 - 9 = 0,$

$\lambda = 1, \qquad y = 0.$

$z + \cancel{2xz} + \cancel{2\mu x z} = 0$

$x + \cancel{2xz} + \cancel{2\mu x z} = 0$

Differenz $\Longrightarrow z - x = 0$

$\Longrightarrow \boxed{z = x}$

$\longrightarrow x^2 + x^2 = 9 \Longrightarrow x^2 = \frac{9}{2}$ $\quad \boxed{x = z = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}}$

Alternativ

İ - İİ :

$2(x - z) + 2\mu(x - z) = 0$

$2(x-z)(1+\mu) \Longrightarrow x = z$

oder $\mu = -1$

$(1+\mu)(x-z)=0 \iff \mu=-1$ oder $x=z$.

$\mu=-1$: I) $1+2x-2x=1 \overset{!}{=} 0$ ↯

$x=z$: III) $2x^2=9 \implies \boxed{x=z=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}}$

Kandidaten und Funktionswerte für $f(x,y,z)=x-8y+z$

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad f(P_1)=3\sqrt{2}\,,\qquad P_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad f(P_2)=-3\sqrt{2}\,.$$

Da der Schnitt der beiden Kugeloberflächen (leer, Punkt oder Kreisrand) eine kompakte Menge ist werden Minimum und Maximum der stetigen Funktion f angenommen. Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass in P_1 das globale Maximum und in P_2 das globale Minimum liegt.

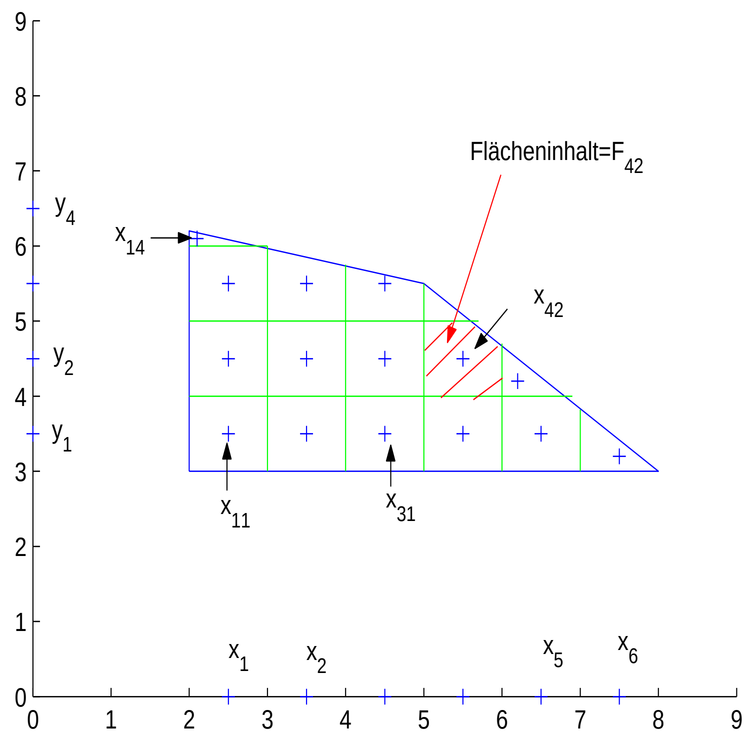
Bereichsintegrale :

Beispiel: Gegeben Dichte $\rho(x, y)$. Gesucht Masse.

Näherung : dichte konstant auf jedem Kästchen $\longrightarrow$

$$M \approx \sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij}$$

$$\int \int \rho(x,y)\, dy\, dx$$



Für immer feinere Unterteilung sollte das Ganze gegen die Masse gehen.

$$\sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij} \longrightarrow \int_D \rho(x,y)\, d(x,y)$$

Allgemeiner sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, : Die Größe $f(\boldsymbol{x})$ wird über den Bereich D ,,aufsummiert".

Speziell für $f = 1$ erhält man im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

$$\int_D 1\, d\boldsymbol{x} \quad = \text{ Flächen- bzw. Volumeninhalt von } D$$

Analog partieller Ableitungen : immer nur eine aktuelle Variable

Integration wie im $\mathbb{R}^1$

Beispiel 1:

$f(x,y) = x \cdot y$ soll über das Rechteck $[0,2] \times [1,4]$ integriert werden.

$$\int_D f(x,y)\,d\boldsymbol{x} = \int_1^4 \boxed{\int_0^2 x \cdot y\,dx}\,dy$$

$\int_0^2 \int_1^4 x\,y \quad dy\,dx$

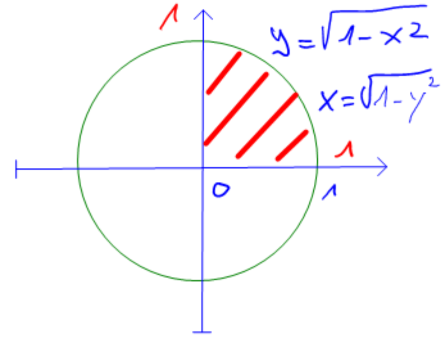
$$= \int_1^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_1^4 y \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] dy$$

$$= \int_1^4 2y\,dy = 4^2 - 1^2 = 15.$$

Oben: Reihenfolge der Integration egal

$$\int_D f(x,y)\,d\boldsymbol{x} = \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y\,dx\,dy = \int_0^2 \int_1^4 x \cdot y\,dy\,dx$$

Wie geht das bei anderen Integrationsbereichen? Zum Beispiel



$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ x, y \geq 0 \right\}$$

Ziel: Beschreibe Bereich durch Angabe von obere und untere Schranken von x und y. Zum Beispiel

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

oder

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$$

Im unteren Fall:

$$\int_D f(x, y)\, d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

ACHTUNG: $\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \underbrace{\int_0^1 f(x, y)\, dy}_{g(x)}\, dx$ ist UNSINN!

Normalbereich im $\mathbb{R}^2$

$$a \le x \le b, \quad h(x) \le y \le g(x) \text{ bzw. } a \le y \le b, \quad h(y) \le x \le g(y)$$

Normalbereich im $\mathbb{R}^3$

$$a \le x \le b, \quad h(x) \le y \le g(x), \quad \tilde{h}(x,y) \le z \le \tilde{g}(x,y) \quad \text{bzw. permutiert}$$

Integration z.B.

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \int_{\tilde{h}(x,y)}^{\tilde{g}(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Beispiel 2: $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$, $D: x^2 + y^2 \leq 1,\; x, y \geq 0$

Möglich aber Ungünstig wäre : $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx$$

Zunächst liefern Formelsammlung

oder die Substitution: $y = \sin u, dy = \cos(u)du$:

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dy = \int \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du = \int \cos^2(u)du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (\cos(2u)+1)\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2u) + u\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin(u)\cos(u) + u) \overset{+C}{=} \tfrac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin(y)\right) + C$$ und damit

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin(y)\right)\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\underbrace{\sqrt{1-(1-x^2)}}_{x} + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) - 0 - \underbrace{\arcsin(0)}_{0}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}dx}_{\text{Substitution } u=1-x^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\arcsin(\sqrt{1-x^2})dx}_{\text{Substitution}} \quad \Big\} \quad x = \cos(\varphi)$$

$\frac{dx}{d\varphi} = -\sin(\varphi)$

$\arcsin\sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$= \underbrace{\arcsin(\sin(\varphi))}_{\varphi}$

für $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \left[-\frac{1}{6}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \arcsin(\sin\varphi)(-\sin(\varphi))d\varphi$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \underbrace{\varphi \cdot \sin(\varphi))d\varphi}_{\text{partielle Integration}} = \cdots = \frac{2}{3}$$

Viel besser:

$0 \leq y \leq 1 \qquad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\, dx dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, [x]_0^{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\left(\sqrt{1-y^2} - 0\right) dy$

$$= \int_0^1 (1-y^2)dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Faustregel: Integriere erst nach der Variablen, die in der einfachsten Form in f vorkommt

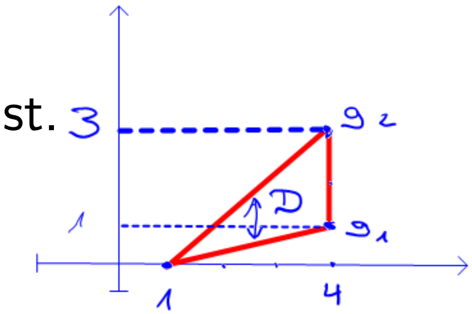
hier $\sqrt{1-y^2} = f(x,y)$

x kommt gar nicht vor!

"gar nicht" $\hat{=}$ f ist konstant bzgl. x.

Beispiel 3: Berechnen Sie $\displaystyle\int_D (x+3y+2)\,d\boldsymbol{x}$

wobei D das Dreieck mit den Ecken (1,0), (4,1), (4,3) ist.



Lösung:

$$D:\ x\in[1,4],\ \frac{x-1}{3}\le y\le x-1$$

$g_1(x) = \frac{1}{3}(x-1)$

$g_2(x) = 1(x-1)$

$$\int_D (x+3y+2)\,d\boldsymbol{x} = \int_1^4 \left[\int_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} (x+3y+2)\,dy\right] dx$$

$$\int_1^4 \left[(x+2)y + \frac{3}{2}y^2\right]_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} dx$$

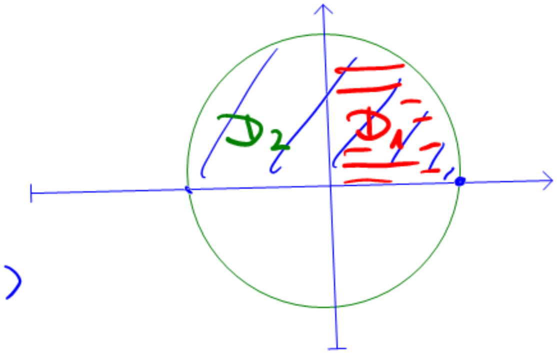
$$= \int_1^4 (x+2)\frac{2}{3}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{9}\,dx$$

$$= \int_1^4 \frac{2}{3}(x^2+x-2) + \cancel{\frac{3}{2}}\cdot\cancel{\frac{8}{9}}^{\,4}_{\,3}\cdot(x-1)^2\,dx = \frac{243}{9} = \frac{81}{3} = 27$$

Rechnung: $\frac{2}{3}\int_1^4 x^2+x-2+2(x^2-2x+1)\,dx = \cancel{\frac{2}{3}}^{\,2}\int_1^4 (\cancel{3}x^2-\cancel{3}x)\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^4$

$= 2\left[\frac{64}{3}-\frac{16}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[\frac{63}{3}-\frac{15}{2}\right] = 2\left[21-\frac{15}{2}\right] = 42-15 = 27$

Beispiel 4: Symmetrien nutzen!



Gegeben: $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \; ; \; y \geq 0 \right\}$

und $f(x,y) = x^2 y$ Berechne $\int_D f \, d(x,y)$

$$f(-x,y) = (-x)^2 y = x^2 y = f(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} f: \text{ y-Achsen symmetrisch} \\ \text{und } D: \quad \text{"} \qquad\qquad \text{"} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{D_1} f = \int_{D_2} f$$

$$\int_D f \, d(x,y) = \int_{D_1} + \int_{D_2} = 2 \int_{D_1} f \, d(x,y)$$

$$= 2 \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 y) \, dy \right] dx = 2 \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^1 x^2 \Big(\underbrace{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 0^2}_{1-x^2} \Big) dx = \int_0^1 \underbrace{x^2 (1-x^2)}_{(x^2 - x^4)} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} .$$