Dr. Hanna Peywand Kiani

# Hörsaalübung 3 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Taylor-Polynome, Extrema implizite Funktionen

Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

# Taylorpolynome

Zur Erinnerung: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $\boldsymbol{x}_0 \in D$

$$T_0(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ \textbf{grad}\ f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen $\times$ entsprechender Schrittweiten.

$$\begin{aligned} T_2(\boldsymbol{x}) &= T_1(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T\, Hf(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) + \ \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T\, Hf(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \end{aligned}$$

Also $T_2 = T_1 + \frac{1}{2!}\sum$ 2-te Ableitungen $\times$ entsprechende Schrittweiten.

$\underline{D \subset \mathbb{R}^3:}$ $\quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T,\ \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T,$

$$T_0(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)\ ,$$

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \ < \ \text{grad}\, f(x_0, y_0, z_0), (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\ >$$

$$= f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \ f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (x - x_0) + \ f_y \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (y - y_0) + \ f_z \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (z - z_0)\ .$$

$$T_2(x, y, z) = T_1(x, y, z) + \ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}^T \ Hf(x_0, y_0, z_0) \ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x, y) + \ \frac{1}{2!} \Big[\ f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 \ + \ 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ \ 2 \cdot f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + \ f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2$$

$$+ 2 \cdot f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + \ f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2\Big]$$

Im $\mathbb{R}^2$ :

$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!} \sum$ 3-te Ableitungen in $\binom{x_0}{y_0}$ $\times$ entsprechende Schrittweiten. Im $\mathbb{R}^2$

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!} \left[ \binom{3}{0} f_{xxx}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)^2(y-y_0) \right.$$
$$\left. \binom{3}{2} f_{xyy}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}\binom{x_0}{y_0}(y-y_0)^3 \right]$$

Fehler:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{1}{3!} \cdot 2^3 \cdot C \cdot \left\| \binom{x}{y} - \binom{x_0}{y_0} \right\|_\infty^3$$

Mit $C =$ Obere Schranke für Beträge aller dritten Ableitungen in allen Zwischenstellen.

Allgemein: $f(\boldsymbol{x}) = T_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0) \,+\, R_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0)\,.$

Bemerkung: $n =$ Dimension des Raumes $\Longrightarrow\ \exists\, n^k$ "verschiedene,, $k-$te Ableitungen

Finde $C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ in **allen** Punkten $\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in [0, 1]$

$$\boxed{|R_m(x; x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C}$$

$n$: Dimension des Raumes

$m$: Grad des Taylorpolynoms

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ in **allen** Punkten $\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in [0, 1]$

Beachte: Fehlerabschätzung (fast) immer nur lokal möglich!

**Beispiel:** Gesucht Taylorpolynom zweiten Grades von
$f(x,y,z) = \sin(x+y) + xe^{z-y} - z^2 + y \qquad \boldsymbol{x}_0 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$

| | |
|---|---|
| $f(x,y,z) = \sin(x+y) + xe^{z-y} - z^2 + y,$ | $f(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$ |
| $f_x(x,y,z) = \cos(x+y) + e^{z-y},$ | $f_x(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$ |
| $f_y(x,y,z) = \cos(x+y) - xe^{z-y} + 1,$ | $f_y(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$ |
| $f_z(x,y,z) = xe^{z-y} - 2z,$ | $f_z(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -\frac{3\pi}{4}$ |
| $f_{xx}(x,y,z) = -\sin(x+y),$ | $f_{xx}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0$ |
| $f_{xy}(x,y,z) = -\sin(x+y) - e^{z-y},$ | $f_{xy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -1$ |
| $f_{xz}(x,y,z) = e^{z-y},$ | $f_{xz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 1$ |
| $f_{yy}(x,y,z) = -\sin(x+y) + xe^{z-y},$ | $f_{yy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$ |
| $f_{yz}(x,y,z) = -xe^{z-y},$ | $f_{yz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ |
| $f_{zz}(x,y,z) = xe^{z-y} - 2,$ | $f_{zz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} - 2$ |

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= f(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) + \ f_x(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4})) \\
&+ \ f_y(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) + \ f_z(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) \\
&+ \ \frac{1}{2}\Big[ f_{xx}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))^2 \ + \ 2\cdot f_{xy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) \\
&+ \ 2\cdot f_{xz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4}) + \ f_{yy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 \\
&+ 2\cdot f_{yz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) + \ f_{zz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})^2\Big] \\
&=
\end{aligned}
$$

Fehlerabschätzung für $R_2(x,y,z) := f(x,y,z) - T_2(x,y,z)$ für

$|x-(-\frac{\pi}{4})| \le 0.1,\ y \in [-0.08+\frac{\pi}{4}, 0.05+\frac{\pi}{4}],\ z \in [-0.1+\frac{\pi}{4}, 0.07+\frac{\pi}{4}]$

Allgemeine Formel: $|R_m(x;x_0)| \le \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C$

$m :=$ Grad des Polynoms, $n :=$ Dimension des Raumes

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ zwischen $(x_0, y_0)^T$ und $(x, y)^T$.

$$
\begin{aligned}
|f_{xxx}(x,y,z)| &= |-\cos(x+y)| \\
|f_{xxy}(x,y,z)| &= |-\cos(x+y)| \\
|f_{xxz}(x,y,z)| &= |0| \\
|f_{xyy}(x,y,z)| &= |-\cos(x+y)+e^{z-y}| \\
|f_{xyz}(x,y,z)| &= |-e^{z-y}| \\
|f_{xzz}(x,y,z)| &= |e^{z-y}| \\
|f_{yyy}(x,y,z)| &= |-\cos(x+y)-xe^{z-y}| \\
|f_{yyz}(x,y,z)| &= |xe^{z-y}| \\
|f_{yzz}(x,y,z)| &= |-xe^{z-y}| \\
|f_{zzz}(x,y,z)| &= |xe^{z-y}|
\end{aligned}
$$

# Extrema ohne Nebenbedingungen:

Extrema : Sammelbegiff für Minima und Maxima

$$D \subset \mathbb{R}^n,\ f:\ D \to \mathbb{R}$$

Lokales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$ : es gibt Umgebung $U$ von $\boldsymbol{x}_0$ mit

$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)$ bzw. $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in U$

Globales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$ :

$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)$ bzw. $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$

Existenz von globalem Minimum und Maximum gesichert, fall $D$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und $f$ stetig!

**Striktes** Maximum/Minimum, wenn oben $\leq$ bzw. $\geq$ durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

## NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMA IN $D^\circ$

$$\boxed{\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) = 0}$$

entspricht im eindimensionalen $f'(x_0) = 0$.

Wird sofort klar mit:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + < \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} > + \frac{1}{2} h\boldsymbol{v}^T H f(x_0 + \theta h\boldsymbol{v}) h\boldsymbol{v} \\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + < \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} > + O(h^2) \\
f(\boldsymbol{x}_0 - h\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{x}_0) - < \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} > + \frac{1}{2} h\boldsymbol{v}^T H f(x_0 + \tilde{\theta} h\boldsymbol{v}) h\boldsymbol{v} \\
&= f(\boldsymbol{x}_0) - < \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} > + O(h^2)
\end{aligned}$$

**Achtung: Randpunkte gesondert betrachten!**

Beispiel: $f(x) = x^2$, $D = [-1,\, 2]$, $f'(x) = 0 \implies x = 0$

Minimum in Null. Intervall kompakt. Wo bleibt das Maximum?

Analoges gilt im Fall $D \subset \mathbb{R}^n$; $n > 1$.

Punkte mit grad $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ werden auch **stationäre Punkte** genannt.

Im eindimensionalen:

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$: Maximum, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$: Minimum

Im mehrdimensionalen: Typ des stationären Punktes (Maximum/Minimum/ Sattelpunkt): abhängig von den Vorzeichen der Eigenwerte der Hessematrix $Hf(\boldsymbol{x}_0)$

Denn im stationären Punkt gilt $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und

$$f(\boldsymbol{x}_0 \pm h\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v} > + \frac{1}{2} h\, \boldsymbol{v}^T H f(x_0 \pm \theta h \boldsymbol{v}) h \boldsymbol{v}$$

Für stationäre Punkte mit grad $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ gilt

| EW'e von $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ | Typ |
|---|---|
| Alle EW'e $> 0$ | Minimum |
| Alle EW'e $< 0$ | Maximum |
| Alle EW'e $\geq 0$ $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$ | Minimum oder Sattel |
| Alle EW'e $\leq 0$ $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$ | Maximum oder Sattel |
| $\exists \lambda_j < 0 \wedge \exists \lambda_k > 0$ | Sattelpunkt |
| Alle EW'e $= 0$ | keine Klassifikation mit dieser Methode möglich |

**Beispiele:**

Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Sattelpunkte oder (lokale/globale) Minima oder Maxima sind:

i) $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 42$$

ii) $h(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$

Tipps zu Teil c Aufgabe 2 Hausaufgaben:

Komponenten vom Gradienten in Faktoren zerlegen.

$f_x = 0$

**und**

$f_y = 0$

Fälle $A \wedge C$ oder $A \wedge D$ oder $B \wedge C$ oder $B \wedge D$

Hessematrix für jeden Kandidaten prüfen!

## Noch ein Beispiel/ Taylor über Reihen

a) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion

$$f\ :\ [-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,]\times[-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,]\ \to\ \mathbb{R}$$

$$f(x,y)\ =\ 4x^2+xy+4y^2+\sin(x-y)\,,$$

indem Sie ein Minimum $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ des Taylorpolynoms zweiten Grades $T_2$ von $f$ mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathsf{T}}$ berechnen.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds $R_2$ in dem errechneten Punkt $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange ab und berechnen Sie $\mathrm{grad} f(\tilde{x},\tilde{y}\,)$.

c) Zeigen Sie, dass der minimale Wert von $f$ auf dem oben angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als $-\frac{9}{49}$ sein kann.

**Lösung:**

a) Taylorpolynom 2. Grades: polynomiale Ausdrücke bis zum Grad 2 werden exakt wiedergegeben.

Für den Sinusterm liest man das Taylorpolynom zweiten Grades aus der Reihenentwicklung ab:

$$\sin(x-y) \;=\; (x-y) - \frac{(x-y)^3}{3!} + \frac{(x-y)^5}{5!} \mp \cdots$$

ab und erhält für $f$

$$T_2(x,y) = 4x^2 + xy + 4y^2 + (x-y)$$

und damit

$$\operatorname{grad} T_2(x,y) = (8x+y+1,\; 8y+x-1)$$

$$\operatorname{grad} T_2(x,y) = 0 \iff y = -1-8x \quad \text{und} \quad 8(-1-8x)+x-1 = 0$$

$\Longleftrightarrow \tilde{x} = -\frac{1}{7},\ \tilde{y} = \frac{1}{7}$, einziger Kandidat für ein Minimum.

$$H\,T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der Hesse Matrix:

$$T_2\left(-\tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{7}\right) = -\tfrac{1}{7} = -0,142857\cdots.$$

b) $|R_m(x;x_0)| \le \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C$

Alle dritten Ableitungen haben die Form $\pm\cos(x-y)$.

Gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen: $C = 1$.

$$\left|R_2\left(-\frac{1}{7},\ \frac{1}{7}\right)\right| \le \frac{1\cdot 2^3}{3!}\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty^3 = \frac{4}{21\cdot 49} < 0.00389$$

Tatsächlich gilt $\left|f\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right) - T_2\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)\right| \approx 0.0038714.$

$$\text{grad} f\left(-\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{7}\right) = \begin{pmatrix} -1+\cos(-2/7) \\ 1-\cos(-2/7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0405\cdots \\ 0.0405\cdots \end{pmatrix}$$

c) Auf dem angegebenem Definitionsbereich gilt

$$|R_2\,(x,\ y)| \leq \frac{1\cdot 2^3}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{48}$$

Für den minimalen Wert der Funktion gilt daher

$$f(x_{min}, y_{min}) \geq T_2(x_{min}, y_{min}) - \frac{1}{48} \geq T_2(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}) - \frac{1}{48} \geq \qquad = -\frac{9}{49}$$

# Satz über implizite Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $g$ sei $C^k$ Funktion, $k \geq 1$.

Gesucht : Lösungen von $g = 0$

m Gleichungen, n Unbekannte. Mehr Variablen als Gleichungen.

Frage: kann man die eine oder andere Variable eliminieren? Wenn ja, welche?

**Einfaches Beispiel 1:** $g(x, y) = x^2 - y = 0 \implies x = \pm\sqrt{y}$

Eindeutige Auflösung nach $x$ global nicht möglich.

Was passiert lokal? Also in einzelnen Punkten.

$(x_0, y_0)^T := (3, 9)^T$ : In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = g(y) := \sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (-2, 4)^T$ : In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = g(y) := -\sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (0, 0)^T$ : In der Nähe dieses Punktes ist
keine eindeutige Auflösbarkeit gegeben! Hier ist $g_x = 2x = 0$.

**Noch ein Beispiel:** $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5 um Null.

Global kann man keine Variable eliminieren.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$x = g(y) := \sqrt{25 - y^2}$ oder auch $y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt

$y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$
Eine Auflösung nach $x$ ist nicht möglich. Hier ist wieder $g_x = 2x = 0$.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$x = g(y) := \sqrt{25 - y^2}$
Eine Auflösung nach $y$ ist nicht möglich. Hier ist $g_y = 2y = 0$.

Auskunft über den allgemeinen Fall gibt der

**SATZ:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $g$ sei $C^k$ Funktion, $k \geq 1$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

Sei $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} \in D$ mit $g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$ und

$$Jg\boldsymbol{y} := \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_m} \end{pmatrix} \quad \text{regulär}$$

$\Longrightarrow \quad \exists$ lokal genau ein $f$ mit $f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow y = f(\boldsymbol{x})$.

$f$ ist $C^k$–Funktion mit $\quad Jf(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x}))$.

Im Bsp. 2 oben: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$. Gilt nahe $(4,3)$: $y = \sqrt{25 - x^2} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{2x}{2y}$$

**Beispiel 2:** $g(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0, \qquad (x_0, y_0)^T := (2, -2)^T$ .

Fragen:

- $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T$ nach $y$ aufglösbar?

  D.h. : Gibt es lokal Funktion $f(x)$ mit $f(2) = -2$ und
  $g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,?$

- Kann man $y$ explizit angeben?

- Wenn nicht: Näherung z.B. durch Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $g$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$?

- Wie gut ist $T_2$? Graphischer Vergleich.

Antworten: ( $g(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0$ )

- $Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 8y \\ 4y^3 + 8x \end{pmatrix}^T \Longrightarrow Jg(2,-2) = \begin{pmatrix} 32 - 16 & -32 + 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

  In der Nähe von $(2,-2)^T$ kann man nach $y$ oder nach $x$ auflösen.

- Allerding nicht explizit!

  Man kann aber lokal die Funktion $f$ durch Taylorpolynome nähern.

- $T_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2} f''(2)(x-2)^2$

  Wir brauchen noch : $f'(2)$, $f''(2)$. Nach Satz:

$$f'(x) = -g_x/g_y = -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x} \Longrightarrow f'(2) = -\frac{16}{-16} = 1\,.$$

Alternativ : implizites Differenzieren

$$
\begin{aligned}
g(x, y(x)) &= x^4 + (y(x))^4 + 8xy(x) = 0, \\
g'(x, y(x)) &= \\
&= \ (4x^3 + 8y) \ + \ (4y^3 + 8x)y' \ = 0 \\
&\Longrightarrow \ y'(x) = \ -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x}, \qquad\qquad y'(2) = 1 \\
g''(x, y(x)) &=
\end{aligned}
$$

Einsetzen: $x = 2,\ y(2) = -2,\ y'(2) = 1$

$$
0 = g''(2, y(2)) =
$$

$$
\Longrightarrow \ y''(2) = \ 7\,.
$$

$$
\begin{aligned}
T_2(x; 2) &= y(2) + y'(2)(x - 2) + \frac{1}{2}\, y''(2)(x - 2)^2 \\
&= -2 + (x - 2) + \frac{7}{2}(x - 2)^2
\end{aligned}
$$

```
X=1:.01:3 ; Y=-3:.2:-1;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
z= x.^4 + y.^4+8*x.*y ;
hold on
contour(x,y,z,[0 0],'b')
t1=-2+ (X-2); plot(X,t1,'g')
t2=t1+(7/2)*(X-2).^2; plot(X,t2,'r')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('x.^4 + y.^4+8*x.*y = 0')
```